Содержание

1 Системы линейных алгебраических уравнений

Система линейных уравнений выглядит примерно так:

$$\begin{cases} y-2x-z=-3 \\ 3x-y+4z=13 \\ 2y+x+5z=20. \end{cases}$$

Для удобства восприятия удобно её записывать в «отформатированном виде»:

Пример 1. Вот красиво записанная система уравнений.

$$\begin{cases} -2\cdot x + \quad y - \quad z = -3 \\ 3\cdot x - \quad y + 4\cdot z = \ 13 \\ \quad x + 2\cdot y + 5\cdot z = \ 20. \end{cases}$$

Решением системы уравнений называются такие числа, которые после подстановки превращают все уравнения в верные равенства.

Пример 2. Числа $(1;2;3)$ т.е. $x=1$, $y=2$, $z=3$ есть решение системы из примера 1. Действительно, после подстановки и вычислений

$$\begin{cases} -2\cdot 1 & + & 2 & - & 3 & = & -3 \\ 3\cdot 1 & - & 2 & + & 4\cdot 3 & = & 13 \\ 1 & + & 2\cdot 2 & + & 5\cdot 3 & = & 20 \end{cases}$$

получим верные равенства.

В природе встречаются системы с несколькими решениями:

Пример 3 (Система с несколькими решениями).

$$\begin{cases} x & - & y & = & 0 \\ x & - & y & = & 0 \end{cases}$$

$x=1$, $y=1$ — одно решение,
$x=2$, $y=2$ — второе решение,
$x=3$, $y=3$ — третье решение, ...

И встречаются системы вообще без решений:

Упражнение 1. Докажите, что у этой системы

$$\begin{cases} x & - & y & = & 1 \\ x & - & y & = & 2 \end{cases}$$

нет и не может быть решений.

1.1 Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Основной метод решения — *метод исключения неизвестных*. Его суть в многократном применении заклинания:

> Выразить одну неизвестную из одного уравнения и подставить в остальные уравнения.

Пример 4. Решим систему из примера 1. Сначала выразим y из первого уравнения

$$y=-3+2\cdot x+z$$

и подставим во второе:

$$\begin{aligned} 3\cdot x-(-3+2\cdot x+z)+4\cdot z&=13 \\ 3\cdot x+3-2\cdot x-z+4\cdot z&=13 \\ x+3\cdot z&=10 \end{aligned}$$

и третье

$$\begin{aligned} x+2\cdot(-3+2\cdot x+z)+5\cdot z&=20 \\ x-6+4\cdot x+2\cdot z+5\cdot z&=20 \\ 5\cdot x+7\cdot z&=26. \end{aligned}$$

В результате получим систему с меньшим числом неизвестных

$$\begin{cases} x & + & 3\cdot z & = & 10 \\ 5\cdot x & + & 7\cdot z & = & 26 \end{cases} \tag{1}$$

и формулу для нахождения «выраженной» неизвестной

$$y=-3+2\cdot x+z. \tag{2}$$

применения метода элементарных преобразования выглядит как «прополка колонки» — в новой системе появляется колонка, в которой почти ничего нет.

Элемент, который «играет активную роль» в «прополке» и который остается в той самой колонке, называется *ведущий элемент.* (В прошлый раз ведущим элементом был y из первого уравнения).

Так вот, для того, чтобы последовательность элементарных преобразований работала так же, как метод исключения неизвестных,

ведущий элемент следует выбирать в тех строчках, в которых он еще не выбирался.

Так что следующим ведущим элементом следует выбирать что-нибудь из второго или третьего уравнения. Выберем, например, x из второго уравнения и применим: «Умножить второе уравнение на 2 и прибавить к первому» и «умножить второе уравнение на -5 и прибавить к третьему». В результате получится

$$\begin{cases} \quad y - 5\cdot z = 17 \\ x \quad + 3\cdot z = 10 \\ \quad - 8\cdot z = -24. \end{cases}$$

Осталось «прополоть» третью колонку, используя $-8\cdot z$ как ведущий элемент и, получив

$$\begin{cases} \quad y = 1 \\ x \quad = 2 \\ \quad - 8\cdot z = -24, \end{cases}$$

найти ответ.

Отметим, что элементарное преобразование проще (чем метод исключения неизвестной) записывать ручкой на бумаге и проще запрограммировать.

1.4 Задачи про прямую на плоскости

В школе учили, что уравнение прямой на плоскости имеет вид

$$y = k\cdot x + b, \tag{6}$$

где x, y — буквы а k и b — числа.

Например, $y=2\cdot x+3$ — уравнение прямой, а $3=2\cdot x+b$ — непонятно что.

Связь между прямой и уравнением осуществляется через координаты:

1. Если координаты точки на прямой подставить в уравнение, то получится верное равенство.

2. Если к числам, которые после подстановки в уравнение прямой дают верное равенство, отнестись как к координатам точки, то эта точка будет на прямой.

Пример 6 (Как нарисовать прямую по уравнению). Уравнение прямой — это как бы система из одного уравнения с двумя неизвестными. Найдем несколько решений так, как написано в разделе 1.2 (стр. 2), посмотрим на решения как на координаты точек, нарисуем эти точки и проведем через них прямую. Обычно хватает двух точек, но для надежности можно нарисовать и больше.

Упражнение 2. Нарисовать прямую $y = \frac{1}{6}\cdot x + \frac{-37}{6}$.

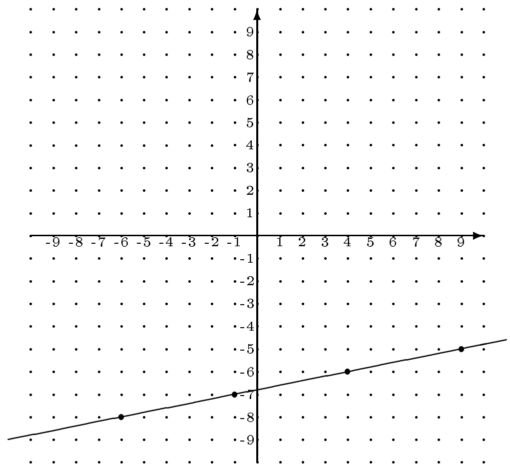

Рис. 1: Картинка с прямой на плоскости

Пример 7 (Как по точкам найти прямую). План действий следующий: берем координаты точек на прямой (достаточно двух точек) и подставляем в «заготовку»

$$y = k\cdot x + b \tag{7}$$

вместо букв x и y. Получится система из нескольких уравнений. Решим её, т.е. найдем значение k и b, и подставим в «заготовку». Вместо букв x и y в «заготовку» ничего подставлять не надо, пусть так буквами и остаются. В результате получится уравнение прямой.

Приступим к реализации: Линия изображена на рисунке 1. Видно, что она проходит через точки с координатами $(-1;7)$ и $(4;-6)$. Подставляем в «заготовку» (7):

$$\begin{cases} 7 = k\cdot(-1) + b \\ -6 = k\cdot 4 \quad + b. \end{cases}$$

Решив систему, получим $k = 1/5$ и $b = -34/5$. Итого:

$$y = \frac{1}{5}\cdot x + \frac{-34}{5}.$$

Для проверки следует подставить координаты тех самых точек (т.е. точек с координатами $(-1;7)$ и $(4;-6)$) в свежеполученное уравнение:

$$7 = \frac{1}{5}\cdot(-1) + \frac{-34}{5},$$
$$-6 = \frac{1}{5}\cdot 4 \quad + \frac{-34}{5}.$$

Получились два верных равенства, и, значит, всё правильно.

Упражнение 3. Найдите уравнение прямой, проходящей через точки $(-6;-8)$ и $(4;-6)$.

Пример 8 (Как найти точку пересечения прямых). Берем два уравнения прямых, записываем их одно под другим и получаем систему уравнений. Решив её, найдем точку пересечения.

Упражнение 4. Найдите точку пересечения прямых $y = \frac{1}{5}\cdot x + \frac{-34}{5}$ и $y = \frac{1}{6}\cdot x + \frac{-37}{6}$.

2 Аналитическая геометрия

Как вы помните из школы, геометрия состоит из прямых, отрезков, треугольников, длин, углов и прочих геометри-

1. Обозначим координаты начала $(x;y)$, и по заклинанию «из конца вычесть начало» составим уравнения: $x-9=-6$ и $y-(-9)=6$.

2. Решив их, найдем $x=3$, $y=-3$.

Так что, фактически, координаты конца вектора находятся по заклинанию «к координатам начала прибавить координаты вектора».

Упражнение 7. $\vec{AB}=(4;2)$, $B=(5;4)$. Найдите координаты точки A.

Пример 11 (Задача про вершину параллелограмма). Даны координаты трех вершин параллелограмма $ABCD$: $A=(2;1)$, $B=(5;2)$, $D=(3;5)$. Найдем координаты четвертой вершины.

Заметим, что если пририсовать к сторонам стрелочки, то получится картинка про сложение векторов по правилу параллелограмма. Т.е., получается формула:

$$\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{AD}.$$

Так и будем решать: Сначала найдем координаты векторов $\vec{AB}=(3;1)$ и $\vec{AD}=(1;4)$ (как это сделано в примере 9). Найдем $\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{AD}=(3+1;1+4)=(4;5)$ и по точке и вектору найдем (как это сделано в примере 10) координаты $C=(6;6)$.

Упражнение 8. Координаты точек A, B и D — как в примере 11. Найдите координаты точки C в параллелограмме $ABDC$[3].

Пример 12 (Задача про деление отрезка). Даны координаты вершин отрезка $A=(2;3)$, $B=(8;5)$, например. Некоторая точка C делит отрезок в некотором отношении, например, пополам. Нужно найти координаты этой точки.

Сведем задачу к векторам. Пририсовав стрелочки, мы увидим два вектора $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$, направленные в одну сторону. Следовательно, один из них получается из другого после умножения на число. Поскольку нам нужно делить отрезок пополам, то это число $1/2$, точнее, $\vec{AC}=(1/2)\cdot\vec{AB}$.

Найдем координаты $\vec{AB}$ (как это сделано в 2.2) и умножим на $1/2$: $\vec{AC}=(1/2)\cdot(8-2;5-3)=(1/2)\cdot(6;2)=$ $=((1/2)\cdot 6;(1/2)\cdot 2))=(3;1)$. Осталось найти (как это сделано в 10 (стр. 4)) координаты точки $C=(5;4)$.

Упражнение 9. Найдите координаты точек, которые делят отрезок AB из примера 12 на три одинаковые части.

2.3 Скалярное произведение

Как известно, у векторов есть две наглядные геометрические характеристики — длина вектора и угол между векторами. Но, поскольку у нас в компьютере вектора хранятся в виде чисел (координат), то нам понадобятся формулы, позволяющие находить длины и углы по координатам. Это большие и сложные формулы, но у них есть повторяющаяся часть, о которой мы сейчас и поговорим.

Если $\vec{a}=(\alpha_1;\alpha_2)$ и $\vec{b}=(\beta_1;\beta_2)$ — координаты векторов, то их *скалярное произведение* находится по формуле

$$\alpha_1\cdot\beta_1+\alpha_2\cdot\beta_2. \tag{8}$$

Заклинание для запоминания:

$$\boxed{\text{сумма произведений координат.}}$$

Само скалярное произведение обозначается «скобочками» — $(\vec{a},\vec{b})$. Иногда его обозначают «точкой» — $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или «острыми скобочками» — $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$.

Пример 13. Если $\vec{a}=(1;2)$ и $\vec{b}=(3;4)$, то их скалярное произведение

$$(\vec{a},\vec{b})=1\cdot 3+2\cdot 4=11.$$

У числа, найденного по формуле (8), есть геометрический смысл — это произведение длин векторов на косинус угла между ними.

$$(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\alpha), \tag{9}$$

где $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ — длины векторов, а α — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2.3.1 Нахождение длин и углов через координаты

Если применить формулу (9) «в обратную сторону», то получим формулы для нахождения длин и углов через скалярное произведение:

$$|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})},\quad \cos(\alpha)=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}, \tag{10}$$

где α — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Упражнение 10. В треугольнике ABC координаты точек $A=(1;1)$, $B=(2;5)$ и $C=(4;2)$. Найдите длины отрезков AB и AC. Найдите угол A (или хотя бы его косинус).

Упражнение 11. Найдите площадь треугольника из упражнения 10. (Подсказка: используйте формулу про произведение длин сторон на синус угла. Синус можно найти «через косинус»).

2.3.2 Условие перпендикулярности векторов

Из формулы (9) видно, что выполняется

Утверждение 2. *Два вектора перпендикулярны друг другу, если их скалярное произведение равно нулю.*

И наоборот, если два вектора перпендикулярны друг другу, то их скалярное произведение равно нулю.

Это позволяет легко проверять перпендикулярность.

Пример 14. $\vec{a}=(1;2)$ перпендикулярен $\vec{b}=(20;-10)$ т.к. $(\vec{a},\vec{b})=1\cdot 20+2\cdot(-10)=0$. $\vec{a}=(1;2)$ не перпендикулярен $\vec{d}=(3;4)$ т.к. $(\vec{a},\vec{d})=1\cdot 3+2\cdot 4\neq 0$.

Пример 15 (Задача про перпендикулярный вектор). Дан вектор на плоскости. Например, $\vec{a}=(1;2)$. Нужно придумать перпендикулярный к нему вектор.

Будем искать нужный вектор в виде $\vec{b}=(x;y)$. Вспомним про критерий перпендикулярности из утверждения 2 и составим уравнение с двумя неизвестными:

$$1\cdot x+2\cdot y=0.$$

У него много решений, но нам достаточно найти одно. Ясно, что $x=2$ и $y=-1$ подойдет.

Кстати, вектор $(2;-1)$ не только перпендикулярен $\vec{a}$, у него еще и длина такая же. (Т.к. $\sqrt{2^2+(-1)^2}=$ $=\sqrt{1^2+(2)^2}$).

[3] Напоминаем, что вершины параллелограмма обозначаются «по кругу».

где $(x_1; y_1)$ — точка, через которую проедет автомобильчик, $(\alpha; \beta)$ — вектор, параллельный направлению движения автомобильчика, а сама прямая — след автомобильчика на плоскости.

Упражнение 15. Найдите параметрическое уравнение прямой, которая проходит через точку $(1; 2)$ и параллельна вектору $(3; 4)$.

Замечание 1. Если вам дали готовое уравнение прямой, то из него можно извлечь некоторую информацию. Коэффициенты при параметре — координаты вектора параллельного прямой. Например, посмотрев на уравнение

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 4 \cdot t, \end{cases}$$

можно сразу догадаться, что эта прямая параллельна вектору $(3; 4)$.

Пример 20 (прямая по двум точкам). Даны две точки, $A = (1; 2)$ и $B = (3; 7)$. Требуется найти уравнение прямой, проходящей через эти точки.

Вспомним, (см. определение 1) что нам понадобится точка на прямой (она у нас есть) и вектор, параллельный прямой (подойдет $\vec{AB} = (3 - 1; 7 - 3) = (2; 4)$). Итак, записываем:

$$\begin{cases} x = 1 + 2 \cdot t \\ y = 2 + 4 \cdot t. \end{cases}$$

Пример 21 (про столкновение автомобилей). Уравнения движения двух автомобилей задаются двумя формулами

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 1 \cdot t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 3 + 1 \cdot t \\ y = 5 - 2 \cdot t. \end{cases}$$

Определить, столкнутся ли они.

Столкновение — это когда два автомобиля находятся в одно время в одном месте. Для решения достаточно соединить два уравнения в одну систему

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 1 \cdot t \\ x = 2 + 1 \cdot t \\ y = 7 - 2 \cdot t \end{cases}$$

и решить её.

Получится $x = 4$, $y = 3$, $t = 1$. Т.е. они столкнутся в точке $(4; 3)$ в момент времени 1.

Пример 22 (опять про столкновение). Уравнения движения двух автомобилей задаются двумя формулами

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 1 \cdot t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 2 + 1 \cdot t \\ y = 7 - 2 \cdot t. \end{cases}$$

Соединив два уравнения в одну систему

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 1 \cdot t \\ x = 2 + 1 \cdot t \\ y = 7 - 2 \cdot t, \end{cases}$$

обнаружим, что у неё нет решения. Следовательно, эти автомобильчики не столкнутся.

Пример 23 (Задача про пересечение прямых). Даны уравнения двух прямых

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 1 \cdot t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 6 + 1 \cdot t \\ y = 2 + 2 \cdot t. \end{cases}$$

Найти точку пересечения.

Будем считать, что это уравнения движения двух автомобильчиков, и будем искать точку пересечения их траекторий.

Точка пересечения траекторий — это когда два автомобиля находятся в одном месте, но не обязательно в одно время. (Время разное, и этим задача о пересечении отличается от задачи о столкновении из примера 21).

Для решения мы обозначим время в уравнениях движения разных автомобильчиков разными буквами

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot \alpha \\ y = 2 + 1 \cdot \alpha \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 6 + 1 \cdot \beta \\ y = 2 + 2 \cdot \beta \end{cases}$$

и соединим их в одну систему:

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot \alpha \\ y = 2 + 1 \cdot \alpha \\ x = 6 + 1 \cdot \beta \\ y = 2 + 2 \cdot \beta. \end{cases}$$

Решив её, получим $x = 7$, $y = 4$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$.

Таким образом, точка пересечения прямых — $(7; 4)$. Если представлять эти прямые как траектории автомобильчиков, то мы также узнали, что первый автомобильчик был в этой точке в момент времени 2 а второй в момент времени 1.

Упражнение 16. Первая прямая проходит через точки $(9; -1; 10)$ и $(11; 0; 12)$. Вторая прямая проходит через точки $(3; -4; 9)$ и $(3; -4; 10)$. Найдите точку пересечения этих прямых.

2.6 Плоскость в пространстве

Плоскость можно представлять себе как поверхность лужи. Она такая плоская потому, что её расплющивает гравитация, направленная перпендикулярно поверхности лужи. Вот почему для написания уравнения достаточно знать две вещи — точку на плоскости и перпендикулярный к плоскости вектор.

Определение 2. *Если координаты точки на плоскости — $(x_0; y_0; z_0)$, а координаты вектора, перпендикулярного плоскости — $(A; B; C)$ (он называется* вектор нормали *к плоскости), то уравнение плоскости записывается так:*

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0. \tag{14}$$

Пример 24. Если координаты точки $(1; 2; 3)$, а координаты вектора $(4; 5; 6)$, то уравнение запишется так:

$$4 \cdot (x - 1) + 5 \cdot (y - 2) + 6 \cdot (z - 3) = 0.$$

Буквы x, y и z — координаты произвольной точки на плоскости. Если вместо них подставить координаты точки на плоскости, то получится верное равенство, если не на плоскости — неверное.

Упражнение 19. Найдите точку, симметричную точке $(6;7;4)$ относительно плоскости $-3\cdot x-2\cdot y-2\cdot z+6=0$.

Пример 33 (Проекция точки на прямую). Эта задача аналогична задаче из примера 32 и решается похожим способом. Для решения нам понадобится «сделать лужу» в нужном месте.

Итак, нам дадут координаты точки (например $(1;0;1)$) и уравнение прямой, например, уравнение (15). По уравнению прямой найдем вектор, параллельный прямой (это будет $(1;-2;1)$). (Как это сделать, написано в замечании 1 (стр. 7)). По той самой точке $(1;0;1)$ и этому вектору составим уравнение плоскости (получится $x-2\cdot y+z-2=0$). Это и будет наша лужа.

Осталось найти точку пересечения прямой и плоскости, как в примере 31.

Упражнение 20. Найдите точку, симметричную точке $A=(-10;12;-1)$ относительно прямой, проходящей через $B=(-3;3;-3)$ и $C=(-7;7;-2)$.

3 Матрицы

Матрица — это таблица из чисел. Вот пример матрицы с двумя строчками и тремя колонками.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix}.$$

Скобки не являются частью матрицы, они тут для отделения матрицы от окружающего пространства.

Обычно, когда говорят про матрицы, то сначала упоминают строчки и потом колонки. Например, матрица сверху это матрица 2×3, а не 3×2. И это же касается элементов матрицы, например, 6 — это элемент с номером 2 3, т.е. элемент из второй строчки и третьей колонки.

Матрицы в математике нужны для того же, для чего нужны подпрограммы в программировании, с их помощью можно сложные формулы с числами записать в виде простых формул, но с матрицами.

Именно для записи формул с матрицами и понадобятся

3.1 Операции с матрицами

Которые обозначаются примерно так же, как и операции с числами — «точкой» «крестиком» и «палочкой»[4].

3.1.1 Сложение, вычитание и умножение на число

Делается так же, как и аналогичные операции с векторами, так сказать, поэлементно:

Пример 34.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7 & 8 & 9\\10 & 11 & 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 10 & 12\\14 & 16 & 18\end{pmatrix},$$

$$2\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\8 & 10 & 12\end{pmatrix}.$$

Заметим, что не любые матрицы можно складывать и вычитать, у них должны быть одинаковые размеры.

[4]У программистов это называется «перегрузка операторов».

3.1.2 Умножение матриц между собой

Принципиально отличается от сложения и вычитания. Оно делается по заклинанию

$$\boxed{\text{строка на столбец.}}$$

Вот пример такого умножения:

Пример 35.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 8\\9 & 10\\11 & 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}58 & 64\\139 & 154\end{pmatrix}.$$

Это делается так:

1. Выбираем строчку левой матрицы и столбец правой.
2. Производим что-то типа скалярного произведения — перемножаем и складываем.
3. Результат (это число) записываем в «ячейку», у которой такой же номер строчки и номер столбца.
4. Проделываем это действие для всех строчек левой матрицы и всех столбцов правой.

Например, число 64, стоящее в первой строке и втором столбце, получилось как результат умножения чисел 1 2 3 из первой строки левой матрицы на 8 10 12 из второго столбца правой матрицы:

$$1\cdot 8+2\cdot 10+3\cdot 12=64.$$

Упражнение 21. Примените заклинание «строка на столбец» к оставшимся строкам и столбцам и убедитесь, что мы вас не обманываем.

Заметим, что не любые матрицы можно перемножать. Их размеры должны соответствовать заклинанию «строка на столбец», т.е. количество элементов в строке левой матрицы равно количеству элементов в столбце правой.

3.1.3 Свойства операций с матрицами

Примерно такие же, как и у аналогичных операций с числами, но не совсем. Как показывает следующий пример, при перестановке множителей результат может измениться.

Пример 36.

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

А как показывает этот

Пример 37.

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & -2\\-3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}7 & -2\\-3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},$$

может и не измениться.

Упражнение 22. Погуглите «свойства операций с матрицами» и внимательно изучите остальные свойства.

(Почему именно на неё, написано ниже, в примере 40 (стр. 11)). Её решением как раз и будут $k = 18/41 \approx \approx 0.439024$ и $b = 124/41 \approx 3.02439$. И та самая линия на рисунке 4 задается уравнением

$$y = 0.439024 \cdot x + 3.02439.$$

Для реализации алгоритма понадобятся «формулы», превращающие числа из исходной системы в числа в улучшенной системе, и вот эти формулы как раз легко записать «через матрицы». Но сначала нам понадобится одно техническое понятие:

3.3.1 Транспонирование матриц

Транспонирование — это как бы переворачивание матрицы через главную диагональ.

Пример 39. Исходная матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

транспонированная матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Как видите, при транспонировании строчки превращаются в столбцы, а столбцы в строчки.

Обозначается транспонирование A^T, т.е.[5]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Итак, продолжим излагать

3.3.2 Алгоритм улучшения систем линейных уравнений

1. Берем систему уравнений, записываем в матричном виде (как это сделано в примере 38) и получаем матричное уравнение вида

$$A \cdot X = Y.$$

2. Умножаем обе части матричного уравнения на транспонированную A слева:

$$A^T \cdot A \cdot X = A^T \cdot Y$$

и получаем новое матричное уравнение.

$$(A^T \cdot A) \cdot X = (A^T \cdot Y).$$

3. Записав его обратно в виде системы уравнений, получим то, что нам и нужно — «улучшенную систему».

Пример 40. Система уравнений (16) со страницы 10 в матричном виде выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 6 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

[5]Но если вы скажете на экзамене «возведение матрицы в степень T», то реакция экзаменатора вас удивит, но не обрадует.

После умножения на транспонированную получится:

$$(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 6 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}) \cdot \begin{pmatrix} k \\ b \end{pmatrix} = (\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}).$$

Умножив и записав в виде системы уравнений, получим систему (17) со страницы 10.

Упражнение 24. Измерьте и взвесьте своих одногруппников и получите формулу, позволяющую по росту находить вес «типичного студента». Сколько будет весить студент с ростом три метра?

Упражнение 25. Погуглите «Периодизация финансовой истории постдефолтной России Подлазов А.В.», прочитайте и поймите, как были сделаны вычисления.

3.4 Обратная матрица

Матрицы можно умножать, но делить матрицы нельзя. Но если очень хочется, то можно это сделать с помощью умножения на обратную матрицу.

Деление умножением вы проходили в школе, сейчас мы вам это напомним: Представьте, что у вашего калькулятора сломалась кнопка «поделить», но вам очень нужно найти 123456789/4. Вспомним, что 4 обратно к 0.25 (т.к. $4 \cdot 0.25 = 1$), и «поделим умножением»: $123456789/4 = = 123456789 \cdot 0.25$. Примерно так мы и будем «делить на матрицу».

Хотелось бы определить обратную матрицу подобно обратным числам (если $a \cdot b = 1$, то a обратно b и b обратно к a), но произведение матриц — это матрица а не число, и оно не может равняться единице. Так что сначала понадобится матричный аналог единицы.

3.4.1 Единичная матрица

Это квадратная матрица, у которой по главной диагонали (той, которая идет от верхнего левого угла в правый нижний) стоят единицы, а в остальных местах нули. Размеры могут быть разные, так что единичных матриц много.

Пример 41. Вот это единичные матрицы разных размеров:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

Обычно, единичную матрицу *обозначают буквой E*.

Важно, чтобы единички стояли по главной диагонали (сверху слева вниз направо), иначе это не единичная матрица.

Единичная матрица при матричном умножении ведет себя как обычное число 1 при обычном умножении чисел т.е.:

$$A \cdot E = A \quad \text{и} \quad E \cdot A = A.$$

Упражнение 26. Умножьте единичную матрицу на $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и убедитесь, что мы вас не обманываем.

Упражнение 27. Перемножьте $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ с $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и поймите, почему единички должны обязательно стоять на главной диагонали.

Для решения введем обозначения: U — таблица с урожаем, X — таблица со съеденным продуктом и V — таблица с вывезенным продуктом. В нашем случае

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

Тут, под первым номером идут кокосы, а под вторым бананы. (Понятно. что если бы выращивали не только кокосы и бананы, а еще и кукурузу и помидоры, то в таблице было бы больше двух чисел).

Между выращенным и съеденным есть очевидная зависимость:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.1 \cdot u_1 + 0.2 \cdot u_2, \\ x_2 &= 0.3 \cdot u_1 + 0.6 \cdot u_2. \end{aligned}$$

Действительно, т.к. при выращивании 1 тонны кокосов съедается 100 кг = 0.1 тонна кокосов, то при выращивании u_1 кокосов съестся $u_1 \cdot 0.1$ кокосов. Аналогично с бананами, на u_2 бананов съестся $u_2 \cdot 0.2$ кокосов. Осталось сложить съеденные кокосы, и получится первое уравнение. Второе получается аналогично.

Между выращенным, съеденным и вывезенным есть очевидная зависимость:

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 + x_1, \\ u_2 &= v_2 + x_2. \end{aligned}$$

Действительно, т.к. всё что не съели то вывезли.

Эти зависимости можно записать в матричном виде:

$$X = A \cdot U \quad \text{и} \quad U = V + X, \tag{19}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

(Кстати, если продуктов не два, а много-много, то зависимости в матричном виде будут те же самые. Вот какие матрицы полезные).

Итак, наша цель — научиться находить запланированный урожай, т.е. U.

Уравнения (19) очень простые, если бы они были «про числа», то вы бы легко выразили U через V. С матрицами это так же просто, но нужно не забывать, что роль 1 теперь играет единичная матрица E:

$$(E - A) \cdot U = V \quad \text{или} \quad U = (E - A)^{-1} \cdot V$$

Осталось найти обратную матрицу и умножить.

Упражнение 31. Погуглите «обратная матрица онлайн», найдите ту самую обратную матрицу и узнайте, какой урожай надо запланировать для вывоза с острова 60 тонн кокосов и 60 тонн бананов.

3.5 Как искать обратную матрицу

Оказывается, для обратной матрицы есть готовая формула. Очень удобно, подставляем в нее числа из матрицы, вычисляем по формулам, и готово. Для матриц размера 2×2 эта формула очень простая:

Утверждение 3. *Если*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{20}$$

то

$$A^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - c \cdot b} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Упражнение 32. Найдите $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$.

Упражнение 33. Перемножьте матрицу (20) с формулой (21) и убедитесь, что мы вас не обманываем.

Для матриц большего размера аналогичные формулы тоже есть, но они ооооочень большие. Так что для матриц размера больше чем 2×2 следует применять

3.5.1 Самый хороший алгоритм поиска обратной матрицы

Даже если вы попали на необитаемый остров, и там совсем нет учебников и справочников, вы сможете найти обратную матрицу наиболее прямолинейным и неинтересным способом — просто решив систему уравнений:

Обозначим $n \times n$ элементов пока неизвестной обратной матрицы $n \times n$ буквами, перемножим и приравняем к единичной. Получится система уравнений из n^2 уравнений с n^2 неизвестными.

Пример 43. Найдем $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^{-1}$. Т.е. найдем числа a, b, c и d в уравнении

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перемножим

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot a + 2 \cdot b & 1 \cdot c + 2 \cdot d \\ 3 \cdot a + 7 \cdot b & 3 \cdot c + 7 \cdot d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и, записав это равенство «поэлементно», получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 \cdot a + 2 \cdot b & & = 1 \\ & 1 \cdot c + 2 \cdot d & = 0 \\ 3 \cdot a + 7 \cdot b & & = 0 \\ & 3 \cdot c + 7 \cdot d & = 1. \end{cases}$$

Решив её, найдем обратную матрицу.

На этом можно было бы и остановиться, но присмотревшись к системе, можно заметить, что она распадается на n систем с n уравнениями, и каждая со своими n неизвестными.

Пример 44. В предыдущем примере можно было бы решать две системы:

$$\begin{cases} 1 \cdot a + 2 \cdot b = 1 \\ 3 \cdot a + 7 \cdot b = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 1 \cdot c + 2 \cdot d = 0 \\ 3 \cdot c + 7 \cdot d = 1. \end{cases}$$

Так что если вас на необитаемом острове n человек, то вы можете «распределить нагрузку» и решать эти системы одновременно.

На этом можно было бы и остановиться, но если вы уже освоили метод элементарных преобразований (про это написано в разделе 1.3 (стр. 2)), то вы сможете заметить, что у этих систем одинаковая левая часть. Значит, и преобразования нужно делать одинаковые.

Упражнение 34. Убедитесь, что эти преобразования такие: Сначала первое уравнение умножить на -3 и прибавить ко второму. Затем второе умножить на -2 и прибавить к первому.

Упр. 15. Ответ:

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 4 \cdot t \end{cases}$$

Упр. 16. Ответ: $(3; -4; 4)$. Для решения следует найти уравнения прямых так, как это сделано в примере 20 (стр. 7). Затем найти точку пересечения, как в примере 23 (стр. 7)
Упр. 17. Ответ: Подойдет $(1; 8; 15)$ например. Проверка: $4 \cdot (7 - 1) + 5 \cdot (8 - 8) + 6 \cdot (9 - 15) = 0$.
Упр. 18. Ответ: $(1; 2; -3)$
Упр. 19. Ответ: $(-6; -1; -4;)$. Указание: Сначала найдите проекцию точки на плоскость.
Упр. 20. Ответ: $(-12; 10; -1;)$. Указание: Сначала найдите уравнение прямой, потом проекцию точки на прямую.
Упр. 24. Ответ: Должно получиться что-то типа «рост в сантиметрах минус сто равное весу в килограммах».
Упр. 28. Ну конечно $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Для проверки надо перемножить, что и сделано в примере 37 (стр. 9).
Упр. 29. Ответ: Ну конечно $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ Про это написано в упражнении 28 (стр. 12).
Упр. 30. Ответ: В этот раз правильным ответом будет

$$X = \begin{pmatrix} 19 & -4 \\ 66 & -14 \end{pmatrix}.$$

Упр. 31. Ответ:

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.33 & 0.67 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Урожай должен быть: 120 тонн кокосов и 240 тонн бананов.
Упр. 32. Ответ:

$$\frac{1}{1 \cdot 4 - 3 \cdot 2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Предметный указатель