решение
система линейных алгебраических уравнений, 2

элементарное преобразование, 2

Это значит, что только одному из n вас на острове нужно будет выбирать преобразования и обсчитывать левую часть системы уравнений, а остальным $n-1$ можно будет списывать вычисления в левой части и самостоятельно обсчитывать только правую.

На этом можно было бы и остановиться, но поскольку неизвестные находятся всегда на одних и тех же местах, то можно их не писать, а писать только коэффициенты.

Пример 45. Это таблица — коэффициенты из двух систем из предыдущего примера:

$$\begin{array}{cc|c|} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{|cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{array}$$

«Палочки» вставлены для разделения, они ничего не обозначают. А если не повторять повторяющуюся часть, то это же можно записать более компактно

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \end{array}$$

Таким образом, у вас на необитаемом острове получится таблица с n строками и $2 \cdot n$ столбцами, представляющая из себя n систем уравнений в компактной форме записи. И теперь вы можете в одиночку, одновременно, решить те самые n систем уравнений.

Пример 46. Если к этой удвоенной матрице применить преобразования из упражнения 34, то получится

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}$$

и, превратив эту удвоенную матрицу обратно в системы уравнений, получим:

$$\begin{cases} 1 \cdot a + 0 \cdot b = 7 \\ 0 \cdot a + 1 \cdot b = -3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 1 \cdot c + 0 \cdot d = -2 \\ 0 \cdot c + 1 \cdot d = 1. \end{cases}$$

Так что обратная матрица из примера 43 будет такой:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 35. Проделайте эти преобразования и убедитесь, что мы вас не обманываем.

Именно этот алгоритм поиска обратной матрицы является самым оптимальным и легко программируемым[7].

Если вы на необитаемом острове как бы Робинзон, то ваш Пятница, заглядывая вам через плечо, заметит, что вы просто

1. Записали возле исходной матрицы единичную.

2. Применяли те преобразования по строкам, которые можно применять к системам уравнений, т.е.:

   (a) «Умножить строку на число и прибавить к другой строке»,

   (b) «умножить или поделить строку на ненулевое число» и

   (c) «переставить строки».

3. В тот момент, когда слева образовалась единичная матрица, справа, как по волшебству, появилась обратная.

4. «Ай какой сильный колдунство!» закричит Пятница, упадет перед вами на песок и поставит вашу ногу себе на голову[8].

К сожалению, почти все читатели этого текста запомнят последние четыре пункта и забудут всё остальное.

Ответы на упражнения

Упр. 1. Потому что, что бы вы ни подставили вместо чисел x и y, их разность $x-y$ не может одновременно равняться 1 и 2.
Упр. 2. Ответ на рисунке 5.

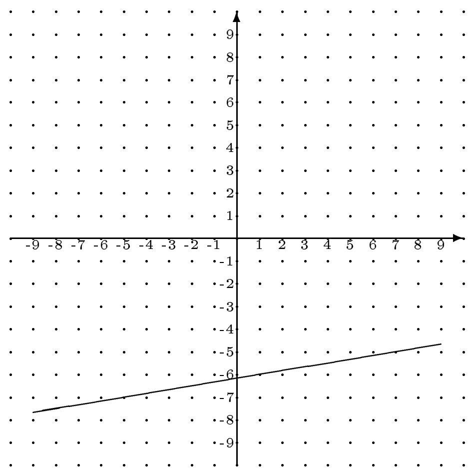

Рис. 5: Ответ к упражнению 2

Упр. 3. Ответ: $y = \frac{1}{6} \cdot x + \frac{-37}{6}$.
Упр. 4. Ответ: $(19; -3)$. Для проверки следует подставить координаты точки пересечения в уравнения прямых:

$$-3 = \frac{1}{5} \cdot 19 + \frac{-34}{5},$$
$$-3 = \frac{1}{6} \cdot 19 + \frac{-37}{6}.$$

Получились два верных равенства, и, значит, всё правильно.
Упр. 5. Для этого следует нарисовать несколько направленных отрезков с одинаковой длиной и одинаковым направлением.
Упр. 6. Ответ: $(12; 15)$.
Упр. 7. Ответ: $(1; 2)$.
Упр. 8. Ответ: $(0; 4)$.
Упр. 9. Ответ: $(4; 3.5)$ и $(6; 4.5)$.
Упр. 10. Ответ: $\sqrt{17}$, $\sqrt{10}$ и $\cos A = 7/\sqrt{170}$.
Упр. 11. Ответ: 5.5.
Упр. 12. Ответ: $(-2; 1)$.
Упр. 13. Ответ: $D = (-2; 3)$ и $C = (1; 0)$. Для решения нужно в качестве $\vec{AD}$ взять противоположный вектор — $(-3; -1)$.
Упр. 14. Ответ: $(1; 0; 0)$. Вместо 1 можно подставить любое другое число.

[7] Ну почти самым. За последнее время много чего напридумывали.

[8]

3.4.2 Определение обратной матрицы

Вот теперь мы можем определить обратную матрицу:

Определение 3. *Если $A \cdot B = E$, то A обратна к B и B обратна к A*[6].

Пример обратной матрицы приведен выше, в примере 37 (стр. 9).

Упражнение 28. Какой будет матрица, обратная к $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$?

Замечание 4. Кроме того:

1. Обратные матрицы бывают только у «квадратных» матриц. Даже если произведение двух «прямоугольных» матриц равно единичной (не слабо ли вам придумать пример таких матриц?), называть одну из них обратной воспрещается.
2. У некоторых матриц обратной нет. Например, у матрицы, состоящей только из нулей. Но не только у неё.
3. Подобно числам, обратную матрицу обозначают «минус первой степенью».
4. Если вы скажете на экзамене, что «Обратная матрица это матрица в минус первой степени», вам поставят двойку.

Упражнение 29. Чему равна $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^{-1}$?

3.4.3 Матричные уравнения

С помощью обратной матрицы можно делать примерно то же, что и с числами при помощи деления, т.е. решать уравнения.

Пример 42 (Задача про матричные уравнения). Дано уравнение

$$A \cdot X = Y,$$

например

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 24 & 34 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Нужно найти матрицу X.

Если бы это были просто числа, то вы бы поделили (или умножили на обратное число). Мы тоже будем умножать на обратную матрицу (её возьмем из упражнения 28), но с какой стороны?

Попытка первая:

$$X = A^{-1} \cdot Y$$

или

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 24 & 34 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 24 & 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Попытка вторая:

$$X = Y \cdot A^{-1}$$

или

$$X = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 24 & 34 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \\ = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 24 & 34 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -4 \\ 66 & -14 \end{pmatrix}.$$

Получилось «два ответа», но правильный из них только один. Чтобы узнать, который, следует сделать проверку, т.е. подставить X в исходное уравнение (18):

Проверка первого варианта:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 24 & 34 \end{pmatrix}.$$

Проверка второго:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 19 & -4 \\ 66 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 151 & -32 \\ 519 & -110 \end{pmatrix}.$$

Правильный ответ:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 30. Решите другое уравнение:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 24 & 34 \end{pmatrix}.$$

Указание для преподавателей, которое из-за технической ошибки попало в текст методички: Конечно, правильней было бы рассказать про умножения обеих частей равенства на обратную матрицу с одной стороны для одного уравнения:

$$A \cdot X = Y \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot Y \Rightarrow \\ \Rightarrow E \cdot X = A^{-1} \cdot Y \Rightarrow X = A^{-1} \cdot Y,$$

и, аналогично, с другой стороны для другого. Но практика показывает, что основной контингент проигнорирует все объяснения и просто попытается запомнить, с какой стороны умножать. На контрольной всё перепутает и проверку делать не будет. Так что у алгоритма «попробовать оба способа и потом сделать проверку» есть некоторое дидактическое преимущество.

3.4.4 Экономическая модель Леонтьева

Сейчас мы расскажем вам то, за что дали Нобелевскую премию (но это не точно).

Представьте себе остров Чунга-чанга, на котором выращивают кокосы и бананы. Местные Чунгачанговцы часть кокосов и бананов съедают сами, остальное отдают своим заокеанским хозяевам.

Предположим для определенности, что при выращивании тонны кокосов они съедают 100 килограмм кокосов и 300 килограмм бананов. При выращивании тонны бананов — 200 килограмм кокосов и 600 килограмм бананов.

Постановка задачи такая: Какой урожай следует запланировать, чтобы вывезти с острова 60 тонн кокосов и 60 тонн бананов?

[6]«Но при перестановке множителей произведение может измениться, что делать, если это произойдет?», спросят самые наблюдательные. По некоторым хитрым причинам, если $A \cdot B = E$, то и $B \cdot A = E$, так что всё в порядке. По научному это называется «левое обратное равно правому обратному».

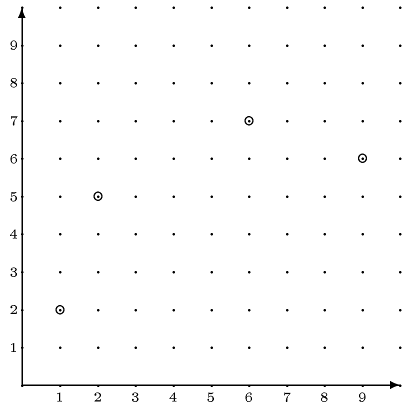

Рис. 3: Точки не на прямой

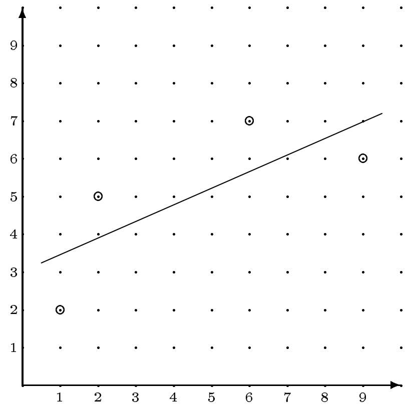

Рис. 4: Прямая вблизи точек

3.2 Матрицы и системы линейных уравнений

Вам, наверное, интересно, почему для умножения матриц математики придумали такое хитрое правило? А вот почему:

Посмотрите внимательно на эту формулу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z \\ 4 \cdot x + 5 \cdot y + 6 \cdot z \end{pmatrix}.$$

Это похоже на левую часть системы линейных уравнений. И действительно, теперь

Пример 38. Систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z = 7 \\ 4 \cdot x + 5 \cdot y + 6 \cdot z = 8 \end{cases}$$

можно записать в виде матричного уравнения:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

3.3 Матрицы и метод наименьших квадратов

Выше вы узнали, что матрицы нужны для простой записи сложных формул. Сейчас вы узнаете пример такой формулы.

Как известно, не у всех систем линейных уравнений есть решение. Но что делать, если решения нет, а найти его очень хочется? Такое странное желание возникает естественным образом при обработке не очень точных данных. Как известно, через любые две точки проходит прямая, и вы знаете, что для её нахождения нужно решать систему линейных уравнений (как это делалось в примере 7 (стр. 3)).

Предположим, координаты точки — результат некоторого измерения и этих точек не две а три или больше. Если все измерения идеально точны (как на рисунке 1 (стр. 3)), то можно сделать как раньше, и у вас получится система из более чем двух уравнений с двумя неизвестными и у неё будет решение.

Но что, если из за ошибок измерения эти точки не лежат на одной прямой (как на рисунке 3, например)? В «реальной жизни» выход есть — нужно провести прямую не через точки, а близко от точек (как на рисунке 4). Человеческий мозг — штука мощная, и с этим легко справляется, но как это запрограммировать?

Если попытаться просто действовать так, как будто точки лежат на одной прямой, (т.е. как в примере 7 (стр. 3)) то, вы получите систему у которой нет решения (т.к. точки не лежат на одной прямой), но которую очень хочется решить.

$$\begin{cases} 1 \cdot k + b = 2 \\ 2 \cdot k + b = 5 \\ 6 \cdot k + b = 7 \\ 9 \cdot k + b = 8. \end{cases} \tag{16}$$

Напомним, что решение системы уравнений — это числа, которые после подстановки в уравнения вместо неизвестных превращают все уравнения в верные равенства. Мы будем искать *псевдорешение* — числа, которые после подстановки превращают уравнения в *почти верные* равенства.

Например, посмотрев на рисунок 4, и определив «на глаз» уравнение прямой:

$$y \approx 0.4 \cdot x + 3,$$

можно обнаружить, что числа $k \approx 0.4$ и $b \approx 3$, после подстановки в систему (16), дадут те самые почти верные равенства.

Упражнение 23. Подставьте и проверьте.

В этот момент у вас должно возникнуть два вопроса:

1. Что значит «почти» и «близко»?
2. При чем тут «наименьшие квадраты» и почему нет «наибольших ромбов» например?

Любопытные могут погуглить Википедию, а мы ~~трусливо~~ смело проигнорируем эти и остальные вопросы и перейдем сразу к *алгоритму решения*:

1. Заменяем систему без решения на другую, улучшенную систему, у которой решение уже есть.
2. Решение улучшенной системы и будет псевдорешением первой (той, у которой нет решения).

Например, систему (16) заменим на

$$\begin{cases} 121 \cdot k + 18 \cdot b = 126 \\ 18 \cdot k + 4 \cdot b = 22. \end{cases} \tag{17}$$

Замечание 2. Левая часть уравнения плоскости похожа на скалярное произведение. А именно, скалярное произведение вектора нормали на вектор, соединяющий две точки на плоскости. И это скалярное произведение приравнивается к нулю. Помедитируйте над этим.

Пример 25 (Пример проверки лежит - не лежит). Вопрос: точка с координатами $(7;8;9)$ лежит на плоскости из примера 24 или нет?

Для проверки подставим:

$$4\cdot(7-1)+5\cdot(8-2)+6\cdot(9-3)=$$

и вычислим

$$=90\neq 0.$$

Как видите, не равно нулю, и, значит, не лежит. А если бы было равно нулю, то лежало бы.

Упражнение 17. Придумайте точку, которая лежит на плоскости из примера 24.

Замечание 3. Скобки в уравнении можно раскрыть, получится то же самое уравнение, но с раскрытыми скобками. Выглядеть оно будет так:

$$A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0,$$

где D — некоторое число.

Пример 26 (уравнение с раскрытыми скобками). Уравнение плоскости из примера 24 после раскрытия скобок будет таким:

$$4\cdot x+5\cdot y+6\cdot z-32=0.$$

На самом деле, в примерах 24 и 26 не два разных уравнения а, одно и то же уравнение — с раскрытыми скобками и с нераскрытыми скобками.

Пример 27 (Как извлечь информацию из уравнения плоскости). Если вам дали уравнение плоскости (такое как (24) или (26)), то по числам из уравнения можно извлечь полезную информацию — координаты вектора, перпендикулярного плоскости. Это будут коэффициенты при переменных x, y и z.

Упражнение 18. Какой вектор перпендикулярен плоскости

$$x+2\cdot y-3\cdot z+4=0?$$

Пример 28 (Плоскость по точке и двум векторам). Предположим, вам дали координаты точки на плоскости (например, $(3;2;1)$) и координаты двух векторов, параллельных плоскости (например, $(1;2;3)$ и $(4;5;6)$), и велели найти уравнение этой плоскости.

Посмотрев на определение 2 (стр. 7), вы увидите, что вам не хватает вектора, перпендикулярного плоскости, т.е. перпендикулярного тем самым двум векторам.

Сделав всё так же, как в примере 19 (стр. 6), найдем этот вектор (это будет $(1;-2;1)$) и составим уравнение плоскости так, как это сделано в примере 24 (стр. 7):

$$1\cdot(x-3)-2\cdot(y-2)+1\cdot(z-1)=0.$$

Если раскрыть скобки (хотя это и не обязательно), получим

$$x-2\cdot y+z=0.$$

Пример 29 (Плоскость по трем точкам). Предположим, вам дали координаты трех точек на плоскости (например, $A=(3;2;1)$, $B=(4;4;4)$ и $C=(7;7;7)$) и хотят получить от вас уравнение этой плоскости.

Это легко, по паре точек на плоскости найдем вектор, лежащий на плоскости (так, как это сделано в примере 9 (стр. 4)) и сведем задачу к предыдущей: $\vec{AB}=(4;4;4)-(3;2;1)=(1;2;3)$ и $\vec{AC}=(7;7;7)-(3;2;1)=(4;5;6)$. И дальше всё, как в примере 28.

Пример 30. Есть еще один способ решить задачу из примера 29, называется «метод неопределенных коэффициентов». Возьмем «заготовку»

$$A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$$

и подставим в неё координаты трёх точек. Получится система из трех уравнений с четырьмя неизвестными A, B, C, и D. Осталось найти одно из решений (так, как это сделано в разделе 1.2 (стр. 2)) и подставить его в «заготовку».

Пример 31 (Задача про пересечение прямой и плоскости). Предположим, вам дали параметрическое уравнение прямой в пространстве:

$$\begin{cases}x=5+1\cdot t\\ y=9-2\cdot t\\ z=9+1\cdot t\end{cases}\tag{15}$$

и уравнение плоскости:

$$x-2\cdot y+z-2=0.$$

И велели найти точку пересечения этой прямой с этой плоскостью.

Это легко, запишем эти уравнения рядышком и получим систему с четырьмя уравнениями и четырьмя неизвестными.

$$\begin{cases}x=5+1\cdot t\\ y=9-2\cdot t\\ z=9+1\cdot t\\ x-2\cdot y+z-2=0.\end{cases}$$

Решив её, найдем $t=1$, $x=6$, $y=7$ и $z=10$. Это и есть точка пересечения — $(6;7;10)$. Если представлять себе плоскость как лужу, а прямую как траекторию самолетика, то $t=1$ — время, в которое самолетик упал в лужу в точку $(6;7;10)$.

Пример 32 (Проекция точки на плоскость). Представьте себе, что у нас есть уравнение плоскости (это как бы лужа) и координаты точки (это как бы камешек). Например, $x-2\cdot y+z-2=0$, и $(5;9;9)$. Если отпустить камешек, то он будет падать перпендикулярно плоскости и сделает бульк. Точка, в которой камешек сделает бульк, называется *проекция точки на плоскость*.

Искать её можно так: По уравнению плоскости найдем вектор, перпендикулярный плоскости, как это сделано в упражнении 18 (стр. 8).

Например, у плоскости $x-2\cdot y+z-2=0$ перпендикулярным вектором будет $(1;-2;1)$. По точке, где камушек $(5;9;9)$, и вектору $(1;-2;1)$ найдем уравнение прямой — это будет траектория падения камушка. В нашем случае это уравнение совершенно случайно совпадает с уравнением (15).

По уравнению прямой и уравнению плоскости найдем их точку пересечения, как это сделано в примере 31. Вот и готово.

Упражнение 12. Найдите еще один вектор, тоже перпендикулярный $\vec{a}$ и с длиной как у $\vec{a}$.

Пример 16 (Задача про квадрат). Даны две соседние вершины квадрата: $A=(1;4)$ и $B=(2;1)$. Найти оставшиеся вершины B и D.

Ясно, что у задачи два решения, оставшиеся вершины могут быть с одной стороны от отрезка AB или с другой стороны от отрезка.

Решать будем так: по заклинанию «из конца вычесть начало» найдем вектор $\vec{AB}=(1;-3)$ (как это сделано в 2.2). Найдем один из перпендикулярных к нему векторов, как это сделано в примере 15. Например, можно считать, что $\vec{AD}=(3;1)$. По точке A и вектору $\vec{AD}$ найдем координаты точки D (как это сделано в 10). Теперь мы знаем три точки в квадрате, и четвертую можно найти как в задаче 11, $C=(5;2)$.

Упражнение 13. Найдите второе решение, т.е. вершины квадрата с другой стороны от отрезка AB.

Пример 17 (Задача про два вектора с одним направлением). Один вектор направлен в ту же сторону, что и другой. У одного известны координаты (например, $\vec{a}=(3;4)$), у другого длина (например, $|\vec{b}|=15$). Найти координаты второго вектора.

Решать можно так: сначала найдем длину первого вектора по формуле 10:

$$|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}=\sqrt{3\cdot 3+4\cdot 4}=5.$$

Видно, что длина первого вектора в три раза меньше длины второго. Следовательно, если умножить первый вектор на 3, то как раз получится второй:

$$\vec{b}=3\cdot\vec{a}=3\cdot(3;4)=(9;12).$$

2.4 Вектора и координаты в пространстве

В пространстве всё почти так же, как и на плоскости, за исключением:

1. Система координат теперь уже не «крестик», а что-то вроде «угла комнаты». Погуглив «система координат в пространстве картинки», можно её как следует рассмотреть.

2. Координаты в пространстве — это три числа, а не два.

3. Для нахождения скалярного произведения вместо формулы 8 (стр. 5) следует применять формулу

$$(\vec{a},\vec{b})=\alpha_1\cdot\beta_1+\alpha_2\cdot\beta_2+\alpha_3\cdot\beta_3, \tag{11}$$

где $\vec{a}=(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)$ и $\vec{b}=(\beta_1;\beta_2;\beta_3)$ — координаты векторов.

Пример 18 (Задача про построение перпендикулярного вектора в пространстве). Дан вектор в пространстве (например $\vec{a}=(1;2;3)$). Найти перпендикулярный к нему.

Для наглядности, поднимите руку вверх (это будет как бы вектор). Ручка, лежащая на столе, перпендикулярна руке, т.е. как раз то, что нужно. Кстати, если на столе лежит несколько ручек, то они все как раз то, что нужно, т.е. у задачи много решений.

Для нахождения координат воспользуемся утверждением 2 (стр. 5). Если $\vec{b}=(x;y;z)$ — искомый вектор, то должно выполняться равенство

$$1\cdot x+2\cdot y+3\cdot z=0.$$

Это система линейных уравнений из одного уравнения с тремя неизвестными. Решив её так, как написано в разделе 1.2, найдем одно из ненулевых решений: $\vec{b}=(-2;1;0)$.

Пример 19 (Задача про построение вектора перпендикулярного двум другим). Дано два вектора в пространстве. (Например, $\vec{a}=(1;2;3)$ и $\vec{b}=(4;5;6)$). Найти вектор, перпендикулярный вектору $\vec{a}$ и перпендикулярный вектору $\vec{b}$.

Для наглядности положите на парту перед собой две ручки. Вектор, направленный вверх — как раз то, что нужно. Кстати, вектор, направленный вниз — тоже то, что нужно, т.е. у задачи много решений.

Решать задачу будем почти так же как и примере 18: Если $\vec{c}=(x;y;z)$ — искомый вектор, то должны выполняться два равенства:

$$\begin{aligned}1\cdot x+2\cdot y+3\cdot z=0,\\ 4\cdot x+5\cdot y+6\cdot z=0.\end{aligned}$$

Это система линейных уравнений из двух уравнений с тремя неизвестными. Решив её (так, как написано в в разделе 1.2 (стр. 2)), найдем одно из ненулевых решений: $\vec{c}=(1;-2;1)$.

Упражнение 14. Найдите ненулевой вектор, перпендикулярный векторам $(0;1;1)$ и $(0;1;2)$.

2.5 Параметрическое уравнение прямой

В природе существует много разнообразных уравнений прямой, но наиболее полезно из них так называемое *параметрическое уравнение прямой.*

Оно похоже на подпрограмму, симулирующую полет самолетика в компьютерной игрушке: на вход подаем время — на выходе получаем координаты самолетика в этот момент времени.

Для написания уравнения конкретной прямой надо знать две вещи — какую-нибудь точку на прямой (точнее, координаты точки), и какой-нибудь вектор, параллельный прямой (точнее, координаты вектора).

Определение 1. *Если эта точка $(x_1;y_1;z_1)$ и вектор $(\alpha;\beta;\gamma)$, то параметрическое уравнение выглядит так:*

$$\begin{cases}x=x_1+\alpha\cdot t\\ y=y_1+\beta\cdot t\\ z=z_1+\gamma\cdot t.\end{cases} \tag{12}$$

Буква t в этом уравнении — это так называемый параметр *— в него можно подставлять время.*

При $t=0$ самолетик находится в точке $(x_1;y_1;z_1)$, при положительных значениях t — перелетает по направлению вектора $(\alpha;\beta;\gamma)$, при отрицательных — наоборот.

Сама прямая — это как бы след, оставленный этим самолетиком в небе.

Аналогично определяется параметрическое уравнение прямой на плоскости:

$$\begin{cases}x=x_1+\alpha\cdot t\\ y=y_1+\beta\cdot t,\end{cases} \tag{13}$$

ческих объектов, которые можно рисовать, смотреть на них глазами и измерять линейками и транспортирами.

И даже ваши любимые компьютерные игрушки снаружи выглядят, как эти самые геометрические объекты, соединенные между собой, но внутри компьютера только числа, как вы, наверное, знаете.

В связи с этим возникает исключительно важная задача — превратить все эти отрезки, углы и треугольники в числа для последующего засовывания в компьютер.

Это делается с помощью метода координат, с которым знакомы все игравшие в «морской бой»: на плоскости рисуется воображаемая «бумага в клеточку», у точек появляются координаты, и эти числа — координаты — и будут обрабатываться компьютером.

Геометрические действия типа соединения и разделения геометрических фигур, а также измерения длин и углов, делаются с помощью большого количества специальных формул. Этих формул очень много, но у них есть повторяющиеся части, и мы поступим как программисты — оформим эти части в виде подпрограмм.

Две основные части, которым мы и уделим максимум внимания — вектор (раздел 2.1) и скалярное произведение (раздел 2.3 (стр. 5)).

2.1 Вектора и направленные отрезки

Направленный отрезок — это отрезок, к которому пририсовали стрелочку, т.е., получится отрезок, один конец которого называется «начало направленного отрезка», а другой конец (тот, что со стрелочкой) называется «конец направленного отрезка».

Вектор — это длина и направление в одном флаконе. Например, «три метра» это длина, «вверх» — направление, а «три метра вверх» — вектор.

Вектор отличается от направленного отрезка тем же, чем длина отличается от отрезка, и направление отличается от стрелочки:

1. Вектор нельзя нарисовать (вы не сможете нарисовать «три метра вверх»), но можно нарисовать направленный отрезок с такой же длиной и направлением (видели в лесу трехметровую ёлочку?).

2. Вектора с одинаковыми длинами и направлениями равны («три метра вверх» это «три метра вверх»), но можно нарисовать несколько направленных отрезков с одинаковой длиной и направлением (в лесу много трехметровых ёлочек).

3. У вектора нет начала и нет конца (где начинается три метра вверх?), но они есть у направленного отрезка.

Предостережение: Изображение лица на фотографии иногда называют «лицо на фотографии», и это обычно не вызывает недоразумений, так как только немногие могут подумать, что это кожу с черепа содрали и на бумажку приклеили. Аналогично, направленный отрезок тоже иногда называют вектором (но имеют в виду именно направленный отрезок), и про вектор говорят то, что можно говорить только про направленный отрезок. Например, фраза «вектор идущий от точки A к точке B» обычно означает «вектор, который можно изобразить в виде направленного отрезка с началом в точке A и концом в точке B».

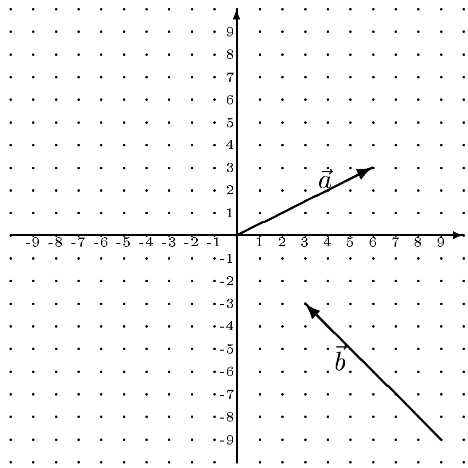

Рис. 2: Картинка с векторами

Ситуация ещё более осложняется тем, что в физике есть понятие «свободный вектор» (это просто вектор) и «закрепленный вектор» (это направленный отрезок).

Обычно вектора обозначают «стрелочкой сверху», примерно так: $\vec{a}$.

2.2 Координаты точек и векторов. Операции с векторами и координатами.

Координаты точек в обыкновенной прямоугольной декартовой системе координат проходят в школе.

Координаты векторов находятся по заклинанию

$$\boxed{\text{из конца вычесть начало,}}$$

с которым вас тоже познакомили в школе.

Упражнение 5. Возьмите бумажку в клеточку, нарисуйте там несколько направленных отрезков и убедитесь, что заклинание находит координаты вектора, а не направленного отрезка.

Пример 9. На рисунке 2 изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдем координаты вектора $2 \cdot \vec{a} - 3 \cdot \vec{b}$.

«Начало вектора» $\vec{b}$ изображено в точке с координатами $(9; -9)$, а «конец вектора» — в точке с координатами $(3; -3)$. Найдем координаты вектора по заклинанию «из конца вычесть начало»: Первая координата $\vec{b}$ равна $3 - 9 = -6$, а вторая $-3 - (-9) = 6$. Таким образом, $\vec{b} = (-6; 6)$. Точно так же находим координаты $\vec{a} = (6; 3)$.

Вспомним, что при умножении вектора на число, его координаты умножаются на это число, а при сложении векторов их координаты складываются[2]. Таким образом, координаты вектора $2 \cdot \vec{a} - 3 \cdot \vec{b}$ будут

$2\cdot\vec{a}-3\cdot\vec{b}=2\cdot(6;3)-3\cdot(-6;6)=(2\cdot 6;2\cdot 3)-(3\cdot(-6);3\cdot 6)= = (12;6) - (-18;18) = (30;-12)$.

Упражнение 6. Найдите координаты вектора $3 \cdot \vec{a} + \vec{b}$.

Пример 10 (Задача про координаты концов вектора). Если мы знаем координаты начала и конца вектора, то координаты вектора находятся по заклинанию «из конца вычесть начало» (см. пример 9 (стр. 4)). Как найти координаты конца вектора, если мы знаем только координаты вектора (например, $(-6; 6)$) и координаты его начала (например, $(9; -9)$)? А вот как:

[2] В школе рисовали рисуночки, соответствующие сложению, вычитанию и умножению вектора на число. Если вы их уже забыли, срочно погуглите картинки «операции с векторами».

Теперь применим метод исключения неизвестных к системе (1). Выразим x из первого уравнения

$$x = 10 - 3 \cdot z$$

и подставим в оставшееся уравнение

$$\begin{aligned} 5 \cdot (10 - 3 \cdot z) + 7 \cdot z &= 26 \\ 50 - 15 \cdot z + 7 \cdot z &= 26 \\ -8 \cdot z &= -24 \end{aligned}$$

и в формулу (2) для «выраженной» неизвестной

$$y = -3 + 2 \cdot (10 - 3 \cdot z) + z = -3 + 20 - 6 \cdot z + z = 17 - 5 \cdot z.$$

Получилась совсем простая система из одного уравнения с одной неизвестной

$$\{-8 \cdot z = -24$$

и две формулы для нахождения двух исключенных неизвестных

$$\begin{aligned} y &= 17 - 5 \cdot z \\ x &= 10 - 3 \cdot z. \end{aligned}$$

Осталось «выразить» значение $z = 3$ и, «подставив» в формулы для нахождения x и y, найти значения $y = 2$ и $x = 1$.

1.2 Решение систем линейных уравнений с несколькими решениями

У систем уравнений может быть и бесконечно много решений (см. упражнение 1 (стр. 1)). Выписать все решения, разумеется, невозможно, но зато можно найти формулы для удобного нахождения всех решений.

Например, возьмем систему

$$\begin{cases} -2 \cdot x + y - z = -3 \\ 3 \cdot x - y + 4 \cdot z = 13. \end{cases}$$

Исключая неизвестные так же, как это сделано в разделе 1.1 (стр. 1), получим формулы

$$\begin{aligned} y &= 17 - 5 \cdot z \\ x &= 10 - 3 \cdot z. \end{aligned} \tag{3}$$

Эти формулы называются *общее решение системы уравнений.*

Просто решения (их иногда называют *частные решения системы уравнений*) легко получить, подставляя в формулы (3) вместо z (эту неизвестную иногда называют «свободная неизвестная») любые числа[1]. Например:

1. Подставив в (3) вместо z число 0, получим: $x = 17$, $y = 10$, $z = 0$. Это одно частное решение.
2. Подставив вместо z число 1, получим $x = 12$, $y = 7$, $z = 1$ — еще одно частное решение.
3. И так далее.

Таким образом, по общему решению можно найти сколько угодно просто решений (частных решений).

[1] Да да, любые, первые пришедшие в голову тоже можно подставлять.

1.3 Метод элементарных преобразований

Элементарное преобразование (системы уравнений) — это когда

> одно уравнение умножают на число и прибавляют к другому уравнению.

Пример 5. Возьмем систему, содержащую уравнения

$$\begin{cases} \ldots \\ 1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z = 4 \\ 5 \cdot x + 6 \cdot y + 7 \cdot z = 8 \\ \ldots \end{cases} \tag{4}$$

и применим преобразование «первое уравнение умножить на -2 и прибавить ко второму». Умножать мы будем «в уме», т.е первое уравнение не изменится, и его мы просто перепишем. Во втором уравнении имеет смысл проделать вычисления отдельно для каждой неизвестной:

$$\begin{aligned} (1 \cdot x) \cdot (-2) + (5 \cdot x) &= 3 \cdot x \\ (2 \cdot y) \cdot (-2) + (6 \cdot y) &= 2 \cdot y \\ (3 \cdot y) \cdot (-2) + (7 \cdot y) &= 1 \cdot y, \end{aligned}$$

и для «правой части»

$$4 \cdot (-2) + 8 = 0.$$

В результате получится новая система

$$\begin{cases} \ldots \\ 1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z = 4 \\ 3 \cdot x + 2 \cdot y + 1 \cdot z = 0 \\ \ldots \end{cases} \tag{5}$$

Самое ценное для нас свойство элементарного преобразования — следующее:

Утверждение 1. *Элементарное преобразование не меняет решений системы уравнений. (Т.е. у системы (4) и (5) решения одинаковые).*

Заметим, что процесс «выразить и подставить» из раздела 1.1 (стр. 1) можно представлять себе как несколько элементарных преобразований.

Например, взяв систему из примера 1 (стр. 1)

$$\begin{cases} -2 \cdot x + y - z = -3 \\ 3 \cdot x - y + 4 \cdot z = 13 \\ x + 2 \cdot y + 5 \cdot z = 20 \end{cases}$$

и применив два элементарных преобразования: «первую строчку умножить на 1 и прибавить ко второй» и «первую строчку умножить на -2 и прибавить к третьей», получим систему

$$\begin{cases} -2 \cdot x + y - z = -3 \\ x + 3 \cdot z = 10 \\ 5 \cdot x + 7 \cdot z = 26, \end{cases}$$

которая представляет из себя то же, что и система 1 (стр. 1) (только формула для выражения y осталась в виде первого уравнения).

То, что в случае применения метода «выразить и подставить» называлось «исключение неизвестной», в случае