Содержание

1 Системы линейных алгебраических уравнений 1

1.1 Методы решения СЛАУ 1
1.2 Решение СЛАУ с несколькими решениями . 2
1.3 Метод элементарных преобразований 2
1.4 Задачи про прямую на плоскости 3

2 Аналитическая геометрия 3

2.1 Вектора и направленные отрезки 4
2.2 Координаты точек и векторов. Операции с векторами и координатами. 4
2.3 Скалярное произведение 5
2.3.1 Нахождение длин и углов через координаты 5
2.3.2 Условие перпендикулярности векторов 5
2.4 Вектора и координаты в пространстве 6
2.5 Параметрическое уравнение прямой 6
2.6 Плоскость в пространстве 7

3 Матрицы 9

3.1 Операции с матрицами 9
3.1.1 Сложение, вычитание и умножение на число 9
3.1.2 Умножение матриц между собой . . . 9
3.1.3 Свойства операций с матрицами . . . 9
3.2 Матрицы и системы линейных уравнений . . 10
3.3 Матрицы и метод наименьших квадратов . . 10
3.3.1 Транспонирование матриц 11
3.3.2 Алгоритм улучшения систем линейных уравнений 11
3.4 Обратная матрица 11
3.4.1 Единичная матрица 11
3.4.2 Определение обратной матрицы 12
3.4.3 Матричные уравнения 12
3.4.4 Экономическая модель Леонтьева . . 12
3.5 Как искать обратную матрицу 13
3.5.1 Самый хороший алгоритм поиска обратной матрицы 13

Ответы на упражнения 14

Предметный указатель 15

1 Системы линейных алгебраических уравнений

Система линейных уравнений выглядит примерно так:

$$\begin{cases} y - 2x - z = -3 \\ 3x - y + 4z = 13 \\ 2y + x + 5z = 20. \end{cases}$$

Для удобства восприятия удобно её записывать в «отформатированном виде»:

Пример 1. Вот красиво записанная система уравнений.

$$\begin{cases} -2\cdot x + \quad y - \quad z = -3 \\ \ \ 3\cdot x - \quad y + 4\cdot z = 13 \\ \qquad x + 2\cdot y + 5\cdot z = 20. \end{cases}$$

Решением системы уравнений называются такие числа, которые после подстановки превращают все уравнения в верные равенства.

Пример 2. Числа $(1;2;3)$ т.е. $x=1$, $y=2$, $z=3$ есть решение системы из примера 1. Действительно, после подстановки и вычислений

$$\begin{cases} -2\cdot 1 & + & 2 & - & 3 & = & -3 \\ 3\cdot 1 & - & 2 & + & 4\cdot 3 & = & 13 \\ 1 & + & 2\cdot 2 & + & 5\cdot 3 & = & 20 \end{cases}$$

получим верные равенства.

В природе встречаются системы с несколькими решениями:

Пример 3 (Система с несколькими решениями).

$$\begin{cases} x & - & y & = & 0 \\ x & - & y & = & 0 \end{cases}$$

$x=1$, $y=1$ — одно решение,
$x=2$, $y=2$ — второе решение,
$x=3$, $y=3$ — третье решение, ...

И встречаются системы вообще без решений:

Упражнение 1. Докажите, что у этой системы

$$\begin{cases} x & - & y & = & 1 \\ x & - & y & = & 2 \end{cases}$$

нет и не может быть решений.

1.1 Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Основной метод решения — *метод исключения неизвестных.* Его суть в многократном применении заклинания:

Выразить одну неизвестную из одного уравнения и подставить в остальные уравнения.

Пример 4. Решим систему из примера 1. Сначала выразим y из первого уравнения

$$y = -3 + 2\cdot x + z$$

и подставим во второе:

$$\begin{aligned} 3\cdot x - (-3 + 2\cdot x + z) + 4\cdot z &= 13 \\ 3\cdot x + 3 - 2\cdot x - z + 4\cdot z &= 13 \\ x + 3\cdot z &= 10 \end{aligned}$$

и третье

$$\begin{aligned} x + 2\cdot(-3 + 2\cdot x + z) + 5\cdot z &= 20 \\ x - 6 + 4\cdot x + 2\cdot z + 5\cdot z &= 20 \\ 5\cdot x + 7\cdot z &= 26. \end{aligned}$$

В результате получим систему с меньшим числом неизвестных

$$\begin{cases} x & + & 3\cdot z & = & 10 \\ 5\cdot x & + & 7\cdot z & = & 26 \end{cases} \tag{1}$$

и формулу для нахождения «выраженной» неизвестной

$$y = -3 + 2\cdot x + z. \tag{2}$$

Теперь применим метод исключения неизвестных к системе (1). Выразим x из первого уравнения

$$x = 10 - 3 \cdot z$$

и подставим в оставшееся уравнение

$$\begin{aligned} 5 \cdot (10 - 3 \cdot z) + 7 \cdot z &= 26 \\ 50 - 15 \cdot z + 7 \cdot z &= 26 \\ -8 \cdot z &= -24 \end{aligned}$$

и в формулу (2) для «выраженной» неизвестной

$$y = -3 + 2 \cdot (10 - 3 \cdot z) + z = -3 + 20 - 6 \cdot z + z = 17 - 5 \cdot z.$$

Получилась совсем простая система из одного уравнения с одной неизвестной

$$\{-8 \cdot z = -24$$

и две формулы для нахождения двух исключенных неизвестных

$$\begin{aligned} y &= 17 - 5 \cdot z \\ x &= 10 - 3 \cdot z. \end{aligned}$$

Осталось «выразить» значение $z=3$ и, «подставив» в формулы для нахождения x и y, найти значения $y = 2$ и $x = 1$.

1.2 Решение систем линейных уравнений с несколькими решениями

У систем уравнений может быть и бесконечно много решений (см. упражнение 1 (стр. 1)). Выписать все решения, разумеется, невозможно, но зато можно найти формулы для удобного нахождения всех решений.

Например, возьмем систему

$$\begin{cases} -2 \cdot x + y - z = -3 \\ 3 \cdot x - y + 4 \cdot z = 13. \end{cases}$$

Исключая неизвестные так же, как это сделано в разделе 1.1 (стр. 1), получим формулы

$$\begin{aligned} y &= 17 - 5 \cdot z \\ x &= 10 - 3 \cdot z. \end{aligned} \tag{3}$$

Эти формулы называются *общее решение системы уравнений.*

Просто решения (их иногда называют *частные решения системы уравнений*) легко получить, подставляя в формулы (3) вместо z (эту неизвестную иногда называют «свободная неизвестная») любые числа[1]. Например:

1. Подставив в (3) вместо z число 0, получим: $x = 17$, $y = 10$, $z = 0$. Это одно частное решение.
2. Подставив вместо z число 1, получим $x = 12$, $y = 7$, $z = 1$ — еще одно частное решение.
3. И так далее.

Таким образом, по общему решению можно найти сколько угодно просто решений (частных решений).

[1] Да да, любые, первые пришедшие в голову тоже можно подставлять.

1.3 Метод элементарных преобразований

Элементарное преобразование (системы уравнений) — это когда

> одно уравнение умножают на число и прибавляют к другому уравнению.

Пример 5. Возьмем систему, содержащую уравнения

$$\begin{cases} \ldots \\ 1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z = 4 \\ 5 \cdot x + 6 \cdot y + 7 \cdot z = 8 \\ \ldots \end{cases} \tag{4}$$

и применим преобразование «первое уравнение умножить на -2 и прибавить ко второму». Умножать мы будем «в уме», т.е первое уравнение не изменится, и его мы просто перепишем. Во втором уравнении имеет смысл проделать вычисления отдельно для каждой неизвестной:

$$\begin{aligned} (1 \cdot x) \cdot (-2) + (5 \cdot x) &= 3 \cdot x \\ (2 \cdot y) \cdot (-2) + (6 \cdot y) &= 2 \cdot y \\ (3 \cdot y) \cdot (-2) + (7 \cdot y) &= 1 \cdot y, \end{aligned}$$

и для «правой части»

$$4 \cdot (-2) + 8 = 0.$$

В результате получится новая система

$$\begin{cases} \ldots \\ 1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z = 4 \\ 3 \cdot x + 2 \cdot y + 1 \cdot z = 0 \\ \ldots \end{cases} \tag{5}$$

Самое ценное для нас свойство элементарного преобразования — следующее:

Утверждение 1. *Элементарное преобразование не меняет решений системы уравнений. (Т.е. у системы (4) и (5) решения одинаковые).*

Заметим, что процесс «выразить и подставить» из раздела 1.1 (стр. 1) можно представлять себе как несколько элементарных преобразований.

Например, взяв систему из примера 1 (стр. 1)

$$\begin{cases} -2 \cdot x + y - z = -3 \\ 3 \cdot x - y + 4 \cdot z = 13 \\ x + 2 \cdot y + 5 \cdot z = 20 \end{cases}$$

и применив два элементарных преобразования: «первую строчку умножить на 1 и прибавить ко второй» и «первую строчку умножить на -2 и прибавить к третьей», получим систему

$$\begin{cases} -2 \cdot x + y - z = -3 \\ x + 3 \cdot z = 10 \\ 5 \cdot x + 7 \cdot z = 26, \end{cases}$$

которая представляет из себя то же, что и система 1 (стр. 1) (только формула для выражения y осталась в виде первого уравнения).

То, что в случае применения метода «выразить и подставить» называлось «исключение неизвестной», в случае применения метода элементарных преобразования выглядит как «прополка колонки» — в новой системе появляется колонка, в которой почти ничего нет.

Элемент, который «играет активную роль» в «прополке» и который остается в той самой колонке, называется *ведущий элемент*. (В прошлый раз ведущим элементом был y из первого уравнения).

Так вот, для того, чтобы последовательность элементарных преобразований работала так же, как метод исключения неизвестных,

> ведущий элемент следует выбирать в тех строчках, в которых он еще не выбирался.

Так что следующим ведущим элементом следует выбирать что-нибудь из второго или третьего уравнения. Выберем, например, x из второго уравнения и применим: «Умножить второе уравнение на 2 и прибавить к первому» и «умножить второе уравнение на -5 и прибавить к третьему». В результате получится

$$\begin{cases} \quad y - 5\cdot z = 17 \\ x \quad + 3\cdot z = 10 \\ \quad\quad - 8\cdot z = -24. \end{cases}$$

Осталось «прополоть» третью колонку, используя $-8\cdot z$ как ведущий элемент и, получив

$$\begin{cases} \quad y \quad = 1 \\ x \quad\quad = 2 \\ \quad\quad - 8\cdot z = -24, \end{cases}$$

найти ответ.

Отметим, что элементарное преобразование проще (чем метод исключения неизвестной) записывать ручкой на бумаге и проще запрограммировать.

1.4 Задачи про прямую на плоскости

В школе учили, что уравнение прямой на плоскости имеет вид

$$y = k\cdot x + b, \tag{6}$$

где x, y — буквы а k и b — числа.

Например, $y{=}2{\cdot}x{+}3$ — уравнение прямой, а $3{=}2{\cdot}x{+}b$ — непонятно что.

Связь между прямой и уравнением осуществляется через координаты:

1. Если координаты точки на прямой подставить в уравнение, то получится верное равенство.

2. Если к числам, которые после подстановки в уравнение прямой дают верное равенство, отнестись как к координатам точки, то эта точка будет на прямой.

Пример 6 (Как нарисовать прямую по уравнению). Уравнение прямой — это как бы система из одного уравнения с двумя неизвестными. Найдем несколько решений так, как написано в разделе 1.2 (стр. 2), посмотрим на решения как на координаты точек, нарисуем эти точки и проведем через них прямую. Обычно хватает двух точек, но для надежности можно нарисовать и больше.

Упражнение 2. Нарисовать прямую $y = \frac{1}{6}\cdot x + \frac{-37}{6}$.

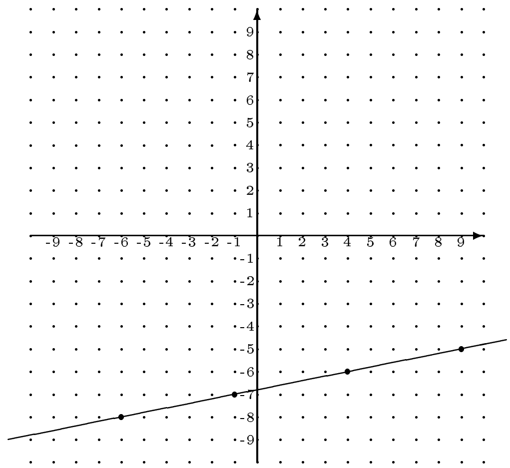

Рис. 1: Картинка с прямой на плоскости

Пример 7 (Как по точкам найти прямую). План действий следующий: берем координаты точек на прямой (достаточно двух точек) и подставляем в «заготовку»

$$y = k\cdot x + b \tag{7}$$

вместо букв x и y. Получится система из нескольких уравнений. Решим её, т.е. найдем значение k и b, и подставим в «заготовку». Вместо букв x и y в «заготовку» ничего подставлять не надо, пусть так буквами и остаются. В результате получится уравнение прямой.

Приступим к реализации: Линия изображена на рисунке 1. Видно, что она проходит через точки с координатами $(-1;7)$ и $(4;-6)$. Подставляем в «заготовку» (7):

$$\begin{cases} 7 = k\cdot(-1) + b \\ -6 = k\cdot 4 \quad + b. \end{cases}$$

Решив систему, получим $k = 1/5$ и $b = -34/5$. Итого:

$$y = \frac{1}{5}\cdot x + \frac{-34}{5}.$$

Для проверки следует подставить координаты тех самых точек (т.е. точек с координатами $(-1;7)$ и $(4;-6)$) в свежеполученное уравнение:

$$7 = \frac{1}{5}\cdot(-1) + \frac{-34}{5},$$
$$-6 = \frac{1}{5}\cdot 4 \quad + \frac{-34}{5}.$$

Получились два верных равенства, и, значит, всё правильно.

Упражнение 3. Найдите уравнение прямой, проходящей через точки $(-6;-8)$ и $(4;-6)$.

Пример 8 (Как найти точку пересечения прямых). Берем два уравнения прямых, записываем их одно под другим и получаем систему уравнений. Решив её, найдем точку пересечения.

Упражнение 4. Найдите точку пересечения прямых $y = \frac{1}{5}\cdot x + \frac{-34}{5}$ и $y = \frac{1}{6}\cdot x + \frac{-37}{6}$.

2 Аналитическая геометрия

Как вы помните из школы, геометрия состоит из прямых, отрезков, треугольников, длин, углов и прочих геометрических объектов, которые можно рисовать, смотреть на них глазами и измерять линейками и транспортирами.

И даже ваши любимые компьютерные игрушки снаружи выглядят, как эти самые геометрические объекты, соединенные между собой, но внутри компьютера только числа, как вы, наверное, знаете.

В связи с этим возникает исключительно важная задача — превратить все эти отрезки, углы и треугольники в числа для последующего засовывания в компьютер.

Это делается с помощью метода координат, с которым знакомы все игравшие в «морской бой»: на плоскости рисуется воображаемая «бумага в клеточку», у точек появляются координаты, и эти числа — координаты — и будут обрабатываться компьютером.

Геометрические действия типа соединения и разделения геометрических фигур, а также измерения длин и углов, делаются с помощью большого количества специальных формул. Этих формул очень много, но у них есть повторяющиеся части, и мы поступим как программисты — оформим эти части в виде подпрограмм.

Две основные части, которым мы и уделим максимум внимания — вектор (раздел 2.1) и скалярное произведение (раздел 2.3 (стр. 5)).

2.1 Вектора и направленные отрезки

Направленный отрезок — это отрезок, к которому пририсовали стрелочку, т.е., получится отрезок, один конец которого называется «начало направленного отрезка», а другой конец (тот, что со стрелочкой) называется «конец направленного отрезка».

Вектор — это длина и направление в одном флаконе. Например, «три метра» это длина, «вверх» — направление, а «три метра вверх» — вектор.

Вектор отличается от направленного отрезка тем же, чем длина отличается от отрезка, и направление отличается от стрелочки:

1. Вектор нельзя нарисовать (вы не сможете нарисовать «три метра вверх»), но можно нарисовать направленный отрезок с такой же длиной и направлением (видели в лесу трехметровую ёлочку?).

2. Вектора с одинаковыми длинами и направлениями равны («три метра вверх» это «три метра вверх»), но можно нарисовать несколько направленных отрезков с одинаковой длиной и направлением (в лесу много трехметровых ёлочек).

3. У вектора нет начала и нет конца (где начинается три метра вверх?), но они есть у направленного отрезка.

Предостережение: Изображение лица на фотографии иногда называют «лицо на фотографии», и это обычно не вызывает недоразумений, так как только немногие могут подумать, что это кожу с черепа содрали и на бумажку приклеили. Аналогично, направленный отрезок тоже иногда называют вектором (но имеют в виду именно направленный отрезок), и про вектор говорят то, что можно говорить только про направленный отрезок. Например, фраза «вектор идущий от точки A к точке B» обычно означает «вектор, который можно изобразить в виде направленного отрезка с началом в точке A и концом в точке B».

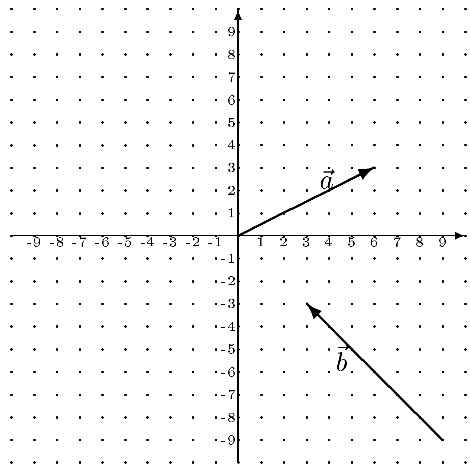

Рис. 2: Картинка с векторами

Ситуация ещё более осложняется тем, что в физике есть понятие «свободный вектор» (это просто вектор) и «закрепленный вектор» (это направленный отрезок).

Обычно вектора обозначают «стрелочкой сверху», примерно так: $\vec{a}$.

2.2 Координаты точек и векторов. Операции с векторами и координатами.

Координаты точек в обыкновенной прямоугольной декартовой системе координат проходят в школе.

Координаты векторов находятся по заклинанию

$\boxed{\text{из конца вычесть начало,}}$

с которым вас тоже познакомили в школе.

Упражнение 5. Возьмите бумажку в клеточку, нарисуйте там несколько направленных отрезков и убедитесь, что заклинание находит координаты вектора, а не направленного отрезка.

Пример 9. На рисунке 2 изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдем координаты вектора $2 \cdot \vec{a} - 3 \cdot \vec{b}$.

«Начало вектора» $\vec{b}$ изображено в точке с координатами $(9;-9)$, а «конец вектора» — в точке с координатами $(3;-3)$. Найдем координаты вектора по заклинанию «из конца вычесть начало»: Первая координата $\vec{b}$ равна $3-9=-6$, а вторая $-3-(-9)=6$. Таким образом, $\vec{b}=(-6;6)$. Точно так же находим координаты $\vec{a}=(6;3)$.

Вспомним, что при умножении вектора на число, его координаты умножаются на это число, а при сложении векторов их координаты складываются[2]. Таким образом, координаты вектора $2 \cdot \vec{a} - 3 \cdot \vec{b}$ будут

$2\cdot\vec{a}-3\cdot\vec{b}=2\cdot(6;3)-3\cdot(-6;6)=(2\cdot 6;2\cdot 3)-(3\cdot(-6);3\cdot 6)= =(12;6)-(-18;18)=(30;-12)$.

Упражнение 6. Найдите координаты вектора $3 \cdot \vec{a} + \vec{b}$.

Пример 10 (Задача про координаты концов вектора). Если мы знаем координаты начала и конца вектора, то координаты вектора находятся по заклинанию «из конца вычесть начало» (см. пример 9 (стр. 4)). Как найти координаты конца вектора, если мы знаем только координаты вектора (например, $(-6;6)$) и координаты его начала (например, $(9;-9)$)? А вот как:

[2]В школе рисовали рисуночки, соответствующие сложению, вычитанию и умножению вектора на число. Если вы их уже забыли, срочно погуглите картинки «операции с векторами».

1. Обозначим координаты начала $(x;y)$, и по заклинанию «из конца вычесть начало» составим уравнения: $x - 9 = -6$ и $y - (-9) = 6$.

2. Решив их, найдем $x = 3$, $y = -3$.

Так что, фактически, координаты конца вектора находятся по заклинанию «к координатам начала прибавить координаты вектора».

Упражнение 7. $\vec{AB}=(4;2)$, $B=(5;4)$. Найдите координаты точки A.

Пример 11 (Задача про вершину параллелограмма). Даны координаты трех вершин параллелограмма $ABCD$: $A = (2;1)$, $B = (5;2)$, $D = (3;5)$. Найдем координаты четвертой вершины.

Заметим, что если пририсовать к сторонам стрелочки, то получится картинка про сложение векторов по правилу параллелограмма. Т.е., получается формула:

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}.$$

Так и будем решать: Сначала найдем координаты векторов $\vec{AB}=(3;1)$ и $\vec{AD}=(1;4)$ (как это сделано в примере 9). Найдем $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} = (3+1;1+4) = (4;5)$ и по точке и вектору найдем (как это сделано в примере 10) координаты $C = (6;6)$.

Упражнение 8. Координаты точек A, B и D — как в примере 11. Найдите координаты точки C в параллелограмме $ABDC$[3].

Пример 12 (Задача про деление отрезка). Даны координаты вершин отрезка $A=(2;3)$, $B=(8;5)$, например. Некоторая точка C делит отрезок в некотором отношении, например, пополам. Нужно найти координаты этой точки.

Сведем задачу к векторам. Пририсовав стрелочки, мы увидим два вектора $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$, направленные в одну сторону. Следовательно, один из них получается из другого после умножения на число. Поскольку нам нужно делить отрезок пополам, то это число $1/2$, точнее, $\vec{AC}=(1/2)\cdot\vec{AB}$.

Найдем координаты $\vec{AB}$ (как это сделано в 2.2) и умножим на $1/2$: $\vec{AC} = (1/2)\cdot(8-2;5-3) = (1/2)\cdot(6;2) = ((1/2)\cdot 6;(1/2)\cdot 2)) = (3;1)$. Осталось найти (как это сделано в 10 (стр. 4)) координаты точки $C = (5;4)$.

Упражнение 9. Найдите координаты точек, которые делят отрезок AB из примера 12 на три одинаковые части.

2.3 Скалярное произведение

Как известно, у векторов есть две наглядные геометрические характеристики — длина вектора и угол между векторами. Но, поскольку у нас в компьютере вектора хранятся в виде чисел (координат), то нам понадобятся формулы, позволяющие находить длины и углы по координатам. Это большие и сложные формулы, но у них есть повторяющаяся часть, о которой мы сейчас и поговорим.

Если $\vec{a} = (\alpha_1;\alpha_2)$ и $\vec{b} = (\beta_1;\beta_2)$ — координаты векторов, то их *скалярное произведение* находится по формуле

$$\alpha_1\cdot\beta_1 + \alpha_2\cdot\beta_2. \tag{8}$$

Заклинание для запоминания:

$\boxed{\text{сумма произведений координат.}}$

Само скалярное произведение обозначается «скобочками» — $(\vec{a},\vec{b})$. Иногда его обозначают «точкой» — $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или «острыми скобочками» — $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$.

Пример 13. Если $\vec{a} = (1;2)$ и $\vec{b} = (3;4)$, то их скалярное произведение

$$(\vec{a},\vec{b}) = 1\cdot 3 + 2\cdot 4 = 11.$$

У числа, найденного по формуле (8), есть геометрический смысл — это произведение длин векторов на косинус угла между ними.

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\alpha), \tag{9}$$

где $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ — длины векторов, а α — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2.3.1 Нахождение длин и углов через координаты

Если применить формулу (9) «в обратную сторону», то получим формулы для нахождения длин и углов через скалярное произведение:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})}, \quad \cos(\alpha) = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}, \tag{10}$$

где α — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Упражнение 10. В треугольнике ABC координаты точек $A = (1;1)$, $B = (2;5)$ и $C = (4;2)$. Найдите длины отрезков AB и AC. Найдите угол A (или хотя бы его косинус).

Упражнение 11. Найдите площадь треугольника из упражнения 10. (Подсказка: используйте формулу про произведение длин сторон на синус угла. Синус можно найти «через косинус»).

2.3.2 Условие перпендикулярности векторов

Из формулы (9) видно, что выполняется

Утверждение 2. *Два вектора перпендикулярны друг другу, если их скалярное произведение равно нулю.*

И наоборот, если два вектора перпендикулярны друг другу, то их скалярное произведение равно нулю.

Это позволяет легко проверять перпендикулярность.

Пример 14. $\vec{a} = (1;2)$ перпендикулярен $\vec{b} = (20;-10)$ т.к. $(\vec{a},\vec{b}) = 1\cdot 20 + 2\cdot(-10) = 0$. $\vec{a} = (1;2)$ не перпендикулярен $\vec{d} = (3;4)$ т.к. $(\vec{a},\vec{d}) = 1\cdot 3 + 2\cdot 4 \neq 0$.

Пример 15 (Задача про перпендикулярный вектор). Дан вектор на плоскости. Например, $\vec{a} = (1;2)$. Нужно придумать перпендикулярный к нему вектор.

Будем искать нужный вектор в виде $\vec{b} = (x;y)$. Вспомним про критерий перпендикулярности из утверждения 2 и составим уравнение с двумя неизвестными:

$$1\cdot x + 2\cdot y = 0.$$

У него много решений, но нам достаточно найти одно. Ясно, что $x = 2$ и $y = -1$ подойдет.

Кстати, вектор $(2;-1)$ не только перпендикулярен $\vec{a}$, у него еще и длина такая же. (Т.к. $\sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{1^2 + (2)^2}$).

[3] Напоминаем, что вершины параллелограмма обозначаются «по кругу».

Упражнение 12. Найдите еще один вектор, тоже перпендикулярный $\vec{a}$ и с длиной как у $\vec{a}$.

Пример 16 (Задача про квадрат). Даны две соседние вершины квадрата: $A=(1;4)$ и $B=(2;1)$. Найти оставшиеся вершины B и D.

Ясно, что у задачи два решения, оставшиеся вершины могут быть с одной стороны от отрезка AB или с другой стороны от отрезка.

Решать будем так: по заклинанию «из конца вычесть начало» найдем вектор $\vec{AB}=(1;-3)$ (как это сделано в 2.2). Найдем один из перпендикулярных к нему векторов, как это сделано в примере 15. Например, можно считать, что $\vec{AD}=(3;1)$. По точке A и вектору $\vec{AD}$ найдем координаты точки D (как это сделано в 10). Теперь мы знаем три точки в квадрате, и четвертую можно найти как в задаче 11, $C=(5;2)$.

Упражнение 13. Найдите второе решение, т.е. вершины квадрата с другой стороны от отрезка AB.

Пример 17 (Задача про два вектора с одним направлением). Один вектор направлен в ту же сторону, что и другой. У одного известны координаты (например, $\vec{a}=(3;4)$), у другого длина (например, $|\vec{b}|=15$). Найти координаты второго вектора.

Решать можно так: сначала найдем длину первого вектора по формуле 10:

$$|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}=\sqrt{3\cdot 3+4\cdot 4}=5.$$

Видно, что длина первого вектора в три раза меньше длины второго. Следовательно, если умножить первый вектор на 3, то как раз получится второй:

$$\vec{b}=3\cdot\vec{a}=3\cdot(3;4)=(9;12).$$

2.4 Вектора и координаты в пространстве

В пространстве всё почти так же, как и на плоскости, за исключением:

1. Система координат теперь уже не «крестик», а что-то вроде «угла комнаты». Погуглив «система координат в пространстве картинки», можно её как следует рассмотреть.

2. Координаты в пространстве — это три числа, а не два.

3. Для нахождения скалярного произведения вместо формулы 8 (стр. 5) следует применять формулу

$$(\vec{a},\vec{b})=\alpha_1\cdot\beta_1+\alpha_2\cdot\beta_2+\alpha_3\cdot\beta_3, \tag{11}$$

   где $\vec{a}=(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)$ и $\vec{b}=(\beta_1;\beta_2;\beta_3)$ — координаты векторов.

Пример 18 (Задача про построение перпендикулярного вектора в пространстве). Дан вектор в пространстве (например $\vec{a}=(1;2;3)$). Найти перпендикулярный к нему.

Для наглядности, поднимите руку вверх (это будет как бы вектор). Ручка, лежащая на столе, перпендикулярна руке, т.е. как раз то, что нужно. Кстати, если на столе лежит несколько ручек, то они все как раз то, что нужно, т.е. у задачи много решений.

Для нахождения координат воспользуемся утверждением 2 (стр. 5). Если $\vec{b}=(x;y;z)$ — искомый вектор, то должно выполняться равенство

$$1\cdot x+2\cdot y+3\cdot z=0.$$

Это система линейных уравнений из одного уравнения с тремя неизвестными. Решив её так, как написано в разделе 1.2, найдем одно из ненулевых решений: $\vec{b}=(-2;1;0)$.

Пример 19 (Задача про построение вектора перпендикулярного двум другим). Дано два вектора в пространстве. (Например, $\vec{a}=(1;2;3)$ и $\vec{b}=(4;5;6)$). Найти вектор, перпендикулярный вектору $\vec{a}$ и перпендикулярный вектору $\vec{b}$.

Для наглядности положите на парту перед собой две ручки. Вектор, направленный вверх — как раз то, что нужно. Кстати, вектор, направленный вниз — тоже то, что нужно, т.е. у задачи много решений.

Решать задачу будем почти так же как и примере 18: Если $\vec{c}=(x;y;z)$ — искомый вектор, то должны выполняться два равенства:

$$\begin{aligned}1\cdot x+2\cdot y+3\cdot z=0,\\ 4\cdot x+5\cdot y+6\cdot z=0.\end{aligned}$$

Это система линейных уравнений из двух уравнений с тремя неизвестными. Решив её (так, как написано в в разделе 1.2 (стр. 2)), найдем одно из ненулевых решений: $\vec{c}=(1;-2;1)$.

Упражнение 14. Найдите ненулевой вектор, перпендикулярный векторам $(0;1;1)$ и $(0;1;2)$.

2.5 Параметрическое уравнение прямой

В природе существует много разнообразных уравнений прямой, но наиболее полезно из них так называемое *параметрическое уравнение прямой.*

Оно похоже на подпрограмму, симулирующую полет самолетика в компьютерной игрушке: на вход подаем время — на выходе получаем координаты самолетика в этот момент времени.

Для написания уравнения конкретной прямой надо знать две вещи — какую-нибудь точку на прямой (точнее, координаты точки), и какой-нибудь вектор, параллельный прямой (точнее, координаты вектора).

Определение 1. *Если эта точка $(x_1;y_1;z_1)$ и вектор $(\alpha;\beta;\gamma)$, то параметрическое уравнение выглядит так:*

$$\begin{cases}x=x_1+\alpha\cdot t\\ y=y_1+\beta\cdot t\\ z=z_1+\gamma\cdot t.\end{cases} \tag{12}$$

Буква t в этом уравнении — это так называемый параметр *— в него можно подставлять время.*

При $t=0$ самолетик находится в точке $(x_1;y_1;z_1)$, при положительных значениях t — перелетает по направлению вектора $(\alpha;\beta;\gamma)$, при отрицательных — наоборот.

Сама прямая — это как бы след, оставленный этим самолетиком в небе.

Аналогично определяется параметрическое уравнение прямой на плоскости:

$$\begin{cases}x=x_1+\alpha\cdot t\\ y=y_1+\beta\cdot t,\end{cases} \tag{13}$$

где $(x_1;y_1)$ — точка, через которую проедет автомобильчик, $(\alpha;\beta)$ — вектор, параллельный направлению движения автомобильчика, а сама прямая — след автомобильчика на плоскости.

Упражнение 15. Найдите параметрическое уравнение прямой, которая проходит через точку $(1;2)$ и параллельна вектору $(3;4)$.

Замечание 1. Если вам дали готовое уравнение прямой, то из него можно извлечь некоторую информацию. Коэффициенты при параметре — координаты вектора параллельного прямой. Например, посмотрев на уравнение

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 4 \cdot t, \end{cases}$$

можно сразу догадаться, что эта прямая параллельна вектору $(3;4)$.

Пример 20 (прямая по двум точкам). Даны две точки, $A = (1;2)$ и $B = (3;7)$. Требуется найти уравнение прямой, проходящей через эти точки.

Вспомним, (см. определение 1) что нам понадобится точка на прямой (она у нас есть) и вектор, параллельный прямой (подойдет $\vec{AB} = (3-1;7-3) = (2;4)$). Итак, записываем:

$$\begin{cases} x = 1 + 2 \cdot t \\ y = 2 + 4 \cdot t. \end{cases}$$

Пример 21 (про столкновение автомобилей). Уравнения движения двух автомобилей задаются двумя формулами

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 1 \cdot t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 3 + 1 \cdot t \\ y = 5 - 2 \cdot t. \end{cases}$$

Определить, столкнутся ли они.

Столкновение — это когда два автомобиля находятся в одно время в одном месте. Для решения достаточно соединить два уравнения в одну систему

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 1 \cdot t \\ x = 2 + 1 \cdot t \\ y = 7 - 2 \cdot t \end{cases}$$

и решить её.

Получится $x = 4$, $y = 3$, $t = 1$. Т.е. они столкнутся в точке $(4;3)$ в момент времени 1.

Пример 22 (опять про столкновение). Уравнения движения двух автомобилей задаются двумя формулами

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 1 \cdot t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 2 + 1 \cdot t \\ y = 7 - 2 \cdot t. \end{cases}$$

Соединив два уравнения в одну систему

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 1 \cdot t \\ x = 2 + 1 \cdot t \\ y = 7 - 2 \cdot t, \end{cases}$$

обнаружим, что у неё нет решения. Следовательно, эти автомобильчики не столкнутся.

Пример 23 (Задача про пересечение прямых). Даны уравнения двух прямых

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 1 \cdot t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 6 + 1 \cdot t \\ y = 2 + 2 \cdot t. \end{cases}$$

Найти точку пересечения.

Будем считать, что это уравнения движения двух автомобильчиков, и будем искать точку пересечения их траекторий.

Точка пересечения траекторий — это когда два автомобиля находятся в одном месте, но не обязательно в одно время. (Время разное, и этим задача о пересечении отличается от задачи о столкновении из примера 21).

Для решения мы обозначим время в уравнениях движения разных автомобильчиков разными буквами

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot \alpha \\ y = 2 + 1 \cdot \alpha \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 6 + 1 \cdot \beta \\ y = 2 + 2 \cdot \beta \end{cases}$$

и соединим их в одну систему:

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot \alpha \\ y = 2 + 1 \cdot \alpha \\ x = 6 + 1 \cdot \beta \\ y = 2 + 2 \cdot \beta. \end{cases}$$

Решив её, получим $x = 7$, $y = 4$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$.

Таким образом, точка пересечения прямых — $(7;4)$. Если представлять эти прямые как траектории автомобильчиков, то мы также узнали, что первый автомобильчик был в этой точке в момент времени 2 а второй в момент времени 1.

Упражнение 16. Первая прямая проходит через точки $(9;-1;10)$ и $(11;0;12)$. Вторая прямая проходит через точки $(3;-4;9)$ и $(3;-4;10)$. Найдите точку пересечения этих прямых.

2.6 Плоскость в пространстве

Плоскость можно представлять себе как поверхность лужи. Она такая плоская потому, что её расплющивает гравитация, направленная перпендикулярно поверхности лужи. Вот почему для написания уравнения достаточно знать две вещи — точку на плоскости и перпендикулярный к плоскости вектор.

Определение 2. *Если координаты точки на плоскости — $(x_0;y_0;z_0)$, а координаты вектора, перпендикулярного плоскости — $(A;B;C)$ (он называется* вектор нормали *к плоскости), то уравнение плоскости записывается так:*

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0. \qquad (14)$$

Пример 24. Если координаты точки $(1;2;3)$, а координаты вектора $(4;5;6)$, то уравнение запишется так:

$$4 \cdot (x - 1) + 5 \cdot (y - 2) + 6 \cdot (z - 3) = 0.$$

Буквы x, y и z — координаты произвольной точки на плоскости. Если вместо них подставить координаты точки на плоскости, то получится верное равенство, если не на плоскости — неверное.

Замечание 2. Левая часть уравнения плоскости похожа на скалярное произведение. А именно, скалярное произведение вектора нормали на вектор, соединяющий две точки на плоскости. И это скалярное произведение приравнивается к нулю. Помедитируйте над этим.

Пример 25 (Пример проверки лежит - не лежит). Вопрос: точка с координатами $(7;8;9)$ лежит на плоскости из примера 24 или нет?

Для проверки подставим:

$$4 \cdot (7-1) + 5 \cdot (8-2) + 6 \cdot (9-3) =$$

и вычислим

$$= 90 \neq 0.$$

Как видите, не равно нулю, и, значит, не лежит. А если бы было равно нулю, то лежало бы.

Упражнение 17. Придумайте точку, которая лежит на плоскости из примера 24.

Замечание 3. Скобки в уравнении можно раскрыть, получится то же самое уравнение, но с раскрытыми скобками. Выглядеть оно будет так:

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0,$$

где D — некоторое число.

Пример 26 (уравнение с раскрытыми скобками). Уравнение плоскости из примера 24 после раскрытия скобок будет таким:

$$4 \cdot x + 5 \cdot y + 6 \cdot z - 32 = 0.$$

На самом деле, в примерах 24 и 26 не два разных уравнения а, одно и то же уравнение — с раскрытыми скобками и с нераскрытыми скобками.

Пример 27 (Как извлечь информацию из уравнения плоскости). Если вам дали уравнение плоскости (такое как (24) или (26)), то по числам из уравнения можно извлечь полезную информацию — координаты вектора, перпендикулярного плоскости. Это будут коэффициенты при переменных x, y и z.

Упражнение 18. Какой вектор перпендикулярен плоскости

$$x + 2 \cdot y - 3 \cdot z + 4 = 0?$$

Пример 28 (Плоскость по точке и двум векторам). Предположим, вам дали координаты точки на плоскости (например, $(3;2;1)$) и координаты двух векторов, параллельных плоскости (например, $(1;2;3)$ и $(4;5;6)$), и велели найти уравнение этой плоскости.

Посмотрев на определение 2 (стр. 7), вы увидите, что вам не хватает вектора, перпендикулярного плоскости, т.е. перпендикулярного тем самым двум векторам.

Сделав всё так же, как в примере 19 (стр. 6), найдем этот вектор (это будет $(1;-2;1)$) и составим уравнение плоскости так, как это сделано в примере 24 (стр. 7):

$$1 \cdot (x-3) - 2 \cdot (y-2) + 1 \cdot (z-1) = 0.$$

Если раскрыть скобки (хотя это и не обязательно), получим

$$x - 2 \cdot y + z = 0.$$

Пример 29 (Плоскость по трем точкам). Предположим, вам дали координаты трех точек на плоскости (например, $A = (3;2;1)$, $B = (4;4;4)$ и $C = (7;7;7)$) и хотят получить от вас уравнение этой плоскости.

Это легко, по паре точек на плоскости найдем вектор, лежащий на плоскости (так, как это сделано в примере 9 (стр. 4)) и сведем задачу к предыдущей: $\vec{AB} = (4;4;4) - (3;2;1) = (1;2;3)$ и $\vec{AC} = (7;7;7) - (3;2;1) = (4;5;6)$. И дальше всё, как в примере 28.

Пример 30. Есть еще один способ решить задачу из примера 29, называется «метод неопределенных коэффициентов». Возьмем «заготовку»

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$$

и подставим в неё координаты трёх точек. Получится система из трех уравнений с четырьмя неизвестными A, B, C, и D. Осталось найти одно из решений (так, как это сделано в разделе 1.2 (стр. 2)) и подставить его в «заготовку».

Пример 31 (Задача про пересечение прямой и плоскости). Предположим, вам дали параметрическое уравнение прямой в пространстве:

$$\begin{cases} x = 5 + 1 \cdot t \\ y = 9 - 2 \cdot t \\ z = 9 + 1 \cdot t \end{cases} \tag{15}$$

и уравнение плоскости:

$$x - 2 \cdot y + z - 2 = 0.$$

И велели найти точку пересечения этой прямой с этой плоскостью.

Это легко, запишем эти уравнения рядышком и получим систему с четырьмя уравнениями и четырьмя неизвестными.

$$\begin{cases} x = 5 + 1 \cdot t \\ y = 9 - 2 \cdot t \\ z = 9 + 1 \cdot t \\ x - 2 \cdot y + z - 2 = 0. \end{cases}$$

Решив её, найдем $t=1$, $x=6$, $y=7$ и $z=10$. Это и есть точка пересечения — $(6;7;10)$. Если представлять себе плоскость как лужу, а прямую как траекторию самолетика, то $t=1$ — время, в которое самолетик упал в лужу в точку $(6;7;10)$.

Пример 32 (Проекция точки на плоскость). Представьте себе, что у нас есть уравнение плоскости (это как бы лужа) и координаты точки (это как бы камешек). Например, $x - 2 \cdot y + z - 2 = 0$, и $(5;9;9)$. Если отпустить камешек, то он будет падать перпендикулярно плоскости и сделает бульк. Точка, в которой камешек сделает бульк, называется *проекция точки на плоскость*.

Искать её можно так: По уравнению плоскости найдем вектор, перпендикулярный плоскости, как это сделано в упражнении 18 (стр. 8).

Например, у плоскости $x - 2 \cdot y + z - 2 = 0$ перпендикулярным вектором будет $(1;-2;1)$. По точке, где камушек $(5;9;9)$, и вектору $(1;-2;1)$ найдем уравнение прямой — это будет траектория падения камушка. В нашем случае это уравнение совершенно случайно совпадает с уравнением (15).

По уравнению прямой и уравнению плоскости найдем их точку пересечения, как это сделано в примере 31. Вот и готово.

Упражнение 19. Найдите точку, симметричную точке $(6;7;4)$ относительно плоскости $-3\cdot x-2\cdot y-2\cdot z+6=0$.

Пример 33 (Проекция точки на прямую). Эта задача аналогична задаче из примера 32 и решается похожим способом. Для решения нам понадобится «сделать лужу» в нужном месте.

Итак, нам дадут координаты точки (например $(1;0;1)$) и уравнение прямой, например, уравнение (15). По уравнению прямой найдем вектор, параллельный прямой (это будет $(1;-2;1)$). (Как это сделать, написано в замечании 1 (стр. 7)). По той самой точке $(1;0;1)$ и этому вектору составим уравнение плоскости (получится $x-2\cdot y+z-2=0$). Это и будет наша лужа.

Осталось найти точку пересечения прямой и плоскости, как в примере 31.

Упражнение 20. Найдите точку, симметричную точке $A=(-10;12;-1)$ относительно прямой, проходящей через $B=(-3;3;-3)$ и $C=(-7;7;-2)$.

3 Матрицы

Матрица — это таблица из чисел. Вот пример матрицы с двумя строчками и тремя колонками.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}.$$

Скобки не являются частью матрицы, они тут для отделения матрицы от окружающего пространства.

Обычно, когда говорят про матрицы, то сначала упоминают строчки и потом колонки. Например, матрица сверху это матрица 2×3, а не 3×2. И это же касается элементов матрицы, например, 6 — это элемент с номером 2 3, т.е. элемент из второй строчки и третьей колонки.

Матрицы в математике нужны для того же, для чего нужны подпрограммы в программировании, с их помощью можно сложные формулы с числами записать в виде простых формул, но с матрицами.

Именно для записи формул с матрицами и понадобятся

3.1 Операции с матрицами

Которые обозначаются примерно так же, как и операции с числами — «точкой» «крестиком» и «палочкой»[4].

3.1.1 Сложение, вычитание и умножение на число

Делается так же, как и аналогичные операции с векторами, так сказать, поэлементно:

Пример 34.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7&8&9\\10&11&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&10&12\\14&16&18\end{pmatrix},$$

$$2\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&6\\8&10&12\end{pmatrix}.$$

Заметим, что не любые матрицы можно складывать и вычитать, у них должны быть одинаковые размеры.

[4] У программистов это называется «перегрузка операторов».

3.1.2 Умножение матриц между собой

Принципиально отличается от сложения и вычитания. Оно делается по заклинанию

$\boxed{\text{строка на столбец.}}$

Вот пример такого умножения:

Пример 35.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7&8\\9&10\\11&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}58&64\\139&154\end{pmatrix}.$$

Это делается так:

1. Выбираем строчку левой матрицы и столбец правой.
2. Производим что-то типа скалярного произведения — перемножаем и складываем.
3. Результат (это число) записываем в «ячейку», у которой такой же номер строчки и номер столбца.
4. Проделываем это действие для всех строчек левой матрицы и всех столбцов правой.

Например, число 64, стоящее в первой строке и втором столбце, получилось как результат умножения чисел 1 2 3 из первой строки левой матрицы на 8 10 12 из второго столбца правой матрицы:

$$1\cdot 8+2\cdot 10+3\cdot 12=64.$$

Упражнение 21. Примените заклинание «строка на столбец» к оставшимся строкам и столбцам и убедитесь, что мы вас не обманываем.

Заметим, что не любые матрицы можно перемножать. Их размеры должны соответствовать заклинанию «строка на столбец», т.е. количество элементов в строке левой матрицы равно количеству элементов в столбце правой.

3.1.3 Свойства операций с матрицами

Примерно такие же, как и у аналогичных операций с числами, но не совсем. Как показывает следующий пример, при перестановке множителей результат может измениться.

Пример 36.

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}.$$

А как показывает этот

Пример 37.

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7&-2\\-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}7&-2\\-3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

может и не измениться.

Упражнение 22. Погуглите «свойства операций с матрицами» и внимательно изучите остальные свойства.

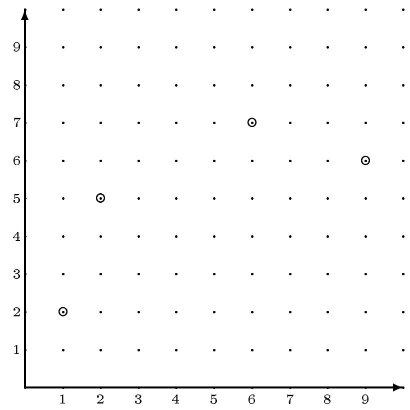

Рис. 3: Точки не на прямой

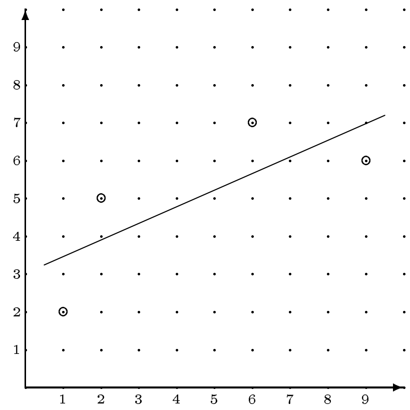

Рис. 4: Прямая вблизи точек

3.2 Матрицы и системы линейных уравнений

Вам, наверное, интересно, почему для умножения матриц математики придумали такое хитрое правило? А вот почему:

Посмотрите внимательно на эту формулу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z \\ 4 \cdot x + 5 \cdot y + 6 \cdot z \end{pmatrix}.$$

Это похоже на левую часть системы линейных уравнений. И действительно, теперь

Пример 38. Систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z = 7 \\ 4 \cdot x + 5 \cdot y + 6 \cdot z = 8 \end{cases}$$

можно записать в виде матричного уравнения:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

3.3 Матрицы и метод наименьших квадратов

Выше вы узнали, что матрицы нужны для простой записи сложных формул. Сейчас вы узнаете пример такой формулы.

Как известно, не у всех систем линейных уравнений есть решение. Но что делать, если решения нет, а найти его очень хочется? Такое странное желание возникает естественным образом при обработке не очень точных данных. Как известно, через любые две точки проходит прямая, и вы знаете, что для её нахождения нужно решать систему линейных уравнений (как это делалось в примере 7 (стр. 3)).

Предположим, координаты точки — результат некоторого измерения и этих точек не две а три или больше. Если все измерения идеально точны (как на рисунке 1 (стр. 3)), то можно сделать как раньше, и у вас получится система из более чем двух уравнений с двумя неизвестными и у неё будет решение.

Но что, если из за ошибок измерения эти точки не лежат на одной прямой (как на рисунке 3, например)? В «реальной жизни» выход есть — нужно провести прямую не через точки, а близко от точек (как на рисунке 4). Человеческий мозг — штука мощная, и с этим легко справляется, но как это запрограммировать?

Если попытаться просто действовать так, как будто точки лежат на одной прямой, (т.е. как в примере 7 (стр. 3)) то, вы получите систему у которой нет решения (т.к. точки не лежат на одной прямой), но которую очень хочется решить.

$$\begin{cases} 1 \cdot k + b = 2 \\ 2 \cdot k + b = 5 \\ 6 \cdot k + b = 7 \\ 9 \cdot k + b = 8. \end{cases} \tag{16}$$

Напомним, что решение системы уравнений — это числа, которые после подстановки в уравнения вместо неизвестных превращают все уравнения в верные равенства. Мы будем искать *псевдорешение* — числа, которые после подстановки превращают уравнения в *почти верные* равенства.

Например, посмотрев на рисунок 4, и определив «на глаз» уравнение прямой:

$$y \approx 0.4 \cdot x + 3,$$

можно обнаружить, что числа $k \approx 0.4$ и $b \approx 3$, после подстановки в систему (16), дадут те самые почти верные равенства.

Упражнение 23. Подставьте и проверьте.

В этот момент у вас должно возникнуть два вопроса:

1. Что значит «почти» и «близко»?

2. При чем тут «наименьшие квадраты» и почему нет «наибольших ромбов» например?

Любопытные могут погуглить Википедию, а мы ~~трусливо~~ смело проигнорируем эти и остальные вопросы и перейдем сразу к *алгоритму решения*:

1. Заменяем систему без решения на другую, улучшенную систему, у которой решение уже есть.

2. Решение улучшенной системы и будет псевдорешением первой (той, у которой нет решения).

Например, систему (16) заменим на

$$\begin{cases} 121 \cdot k + 18 \cdot b = 126 \\ 18 \cdot k + 4 \cdot b = 22. \end{cases} \tag{17}$$

(Почему именно на неё, написано ниже, в примере 40 (стр. 11)). Её решением как раз и будут $k = 18/41 \approx \approx 0.439024$ и $b = 124/41 \approx 3.02439$. И та самая линия на рисунке 4 задается уравнением

$$y = 0.439024 \cdot x + 3.02439.$$

Для реализации алгоритма понадобятся «формулы», превращающие числа из исходной системы в числа в улучшенной системе, и вот эти формулы как раз легко записать «через матрицы». Но сначала нам понадобится одно техническое понятие:

3.3.1 Транспонирование матриц

Транспонирование — это как бы переворачивание матрицы через главную диагональ.

Пример 39. Исходная матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

транспонированная матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Как видите, при транспонировании строчки превращаются в столбцы, а столбцы в строчки.

Обозначается транспонирование A^T, т.е.[5]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Итак, продолжим излагать

3.3.2 Алгоритм улучшения систем линейных уравнений

1. Берем систему уравнений, записываем в матричном виде (как это сделано в примере 38) и получаем матричное уравнение вида

$$A \cdot X = Y.$$

2. Умножаем обе части матричного уравнения на транспонированную A слева:

$$A^T \cdot A \cdot X = A^T \cdot Y$$

и получаем новое матричное уравнение.

$$(A^T \cdot A) \cdot X = (A^T \cdot Y).$$

3. Записав его обратно в виде системы уравнений, получим то, что нам и нужно — «улучшенную систему».

Пример 40. Система уравнений (16) со страницы 10 в матричном виде выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 6 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

[5]Но если вы скажете на экзамене «возведение матрицы в степень T», то реакция экзаменатора вас удивит, но не обрадует.

После умножения на транспонированную получится:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 6 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} k \\ b \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}\right).$$

Умножив и записав в виде системы уравнений, получим систему (17) со страницы 10.

Упражнение 24. Измерьте и взвесьте своих одногруппников и получите формулу, позволяющую по росту находить вес «типичного студента». Сколько будет весить студент с ростом три метра?

Упражнение 25. Погуглите «Периодизация финансовой истории постдефолтной России Подлазов А.В.», прочитайте и поймите, как были сделаны вычисления.

3.4 Обратная матрица

Матрицы можно умножать, но делить матрицы нельзя. Но если очень хочется, то можно это сделать с помощью умножения на обратную матрицу.

Деление умножением вы проходили в школе, сейчас мы вам это напомним: Представьте, что у вашего калькулятора сломалась кнопка «поделить», но вам очень нужно найти 123456789/4. Вспомним, что 4 обратно к 0.25 (т.к. $4 \cdot 0.25 = 1$), и «поделим умножением»: $123456789/4 = = 123456789 \cdot 0.25$. Примерно так мы и будем «делить на матрицу».

Хотелось бы определить обратную матрицу подобно обратным числам (если $a \cdot b = 1$, то a обратно b и b обратно к a), но произведение матриц — это матрица а не число, и оно не может равняться единице. Так что сначала понадобится матричный аналог единицы.

3.4.1 Единичная матрица

Это квадратная матрица, у которой по главной диагонали (той, которая идет от верхнего левого угла в правый нижний) стоят единицы, а в остальных местах нули. Размеры могут быть разные, так что единичных матриц много.

Пример 41. Вот это единичные матрицы разных размеров:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

Обычно, единичную матрицу *обозначают буквой E.*

Важно, чтобы единички стояли по главной диагонали (сверху слева вниз направо), иначе это не единичная матрица.

Единичная матрица при матричном умножении ведет себя как обычное число 1 при обычном умножении чисел т.е.:

$$A \cdot E = A \quad \text{и} \quad E \cdot A = A.$$

Упражнение 26. Умножьте единичную матрицу на $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и убедитесь, что мы вас не обманываем.

Упражнение 27. Перемножьте $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ с $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и поймите, почему единички должны обязательно стоять на главной диагонали.

3.4.2 Определение обратной матрицы

Вот теперь мы можем определить обратную матрицу:

Определение 3. *Если $A \cdot B = E$, то A обратна к B и B обратна к A*[6].

Пример обратной матрицы приведен выше, в примере 37 (стр. 9).

Упражнение 28. Какой будет матрица, обратная к $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$?

Замечание 4. Кроме того:

1. Обратные матрицы бывают только у «квадратных» матриц. Даже если произведение двух «прямоугольных» матриц равно единичной (не слабо ли вам придумать пример таких матриц?), называть одну из них обратной воспрещается.

2. У некоторых матриц обратной нет. Например, у матрицы, состоящей только из нулей. Но не только у неё.

3. Подобно числам, обратную матрицу обозначают «минус первой степенью».

4. Если вы скажете на экзамене, что «Обратная матрица это матрица в минус первой степени», вам поставят двойку.

Упражнение 29. Чему равна $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^{-1}$?

3.4.3 Матричные уравнения

С помощью обратной матрицы можно делать примерно то же, что и с числами при помощи деления, т.е. решать уравнения.

Пример 42 (Задача про матричные уравнения). Дано уравнение

$$A \cdot X = Y,$$

например

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 24 & 34 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Нужно найти матрицу X.

Если бы это были просто числа, то вы бы поделили (или умножили на обратное число). Мы тоже будем умножать на обратную матрицу (её возьмем из упражнения 28), но с какой стороны?

Попытка первая:

$$X = A^{-1} \cdot Y$$

или

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 24 & 34 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 24 & 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Попытка вторая:

$$X = Y \cdot A^{-1}$$

или

$$X = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 24 & 34 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \\ = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 24 & 34 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -4 \\ 66 & -14 \end{pmatrix}.$$

Получилось «два ответа», но правильный из них только один. Чтобы узнать, который, следует сделать проверку, т.е. подставить X в исходное уравнение (18):

Проверка первого варианта:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 24 & 34 \end{pmatrix}.$$

Проверка второго:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 19 & -4 \\ 66 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 151 & -32 \\ 519 & -110 \end{pmatrix}.$$

Правильный ответ:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 30. Решите другое уравнение:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 24 & 34 \end{pmatrix}.$$

Указание для преподавателей, которое из-за технической ошибки попало в текст методички: Конечно, правильней было бы рассказать про умножения обеих частей равенства на обратную матрицу с одной стороны для одного уравнения:

$$A \cdot X = Y \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot Y \Rightarrow \\ \Rightarrow E \cdot X = A^{-1} \cdot Y \Rightarrow X = A^{-1} \cdot Y,$$

и, аналогично, с другой стороны для другого. Но практика показывает, что основной контингент проигнорирует все объяснения и просто попытается запомнить, с какой стороны умножать. На контрольной всё перепутает и проверку делать не будет. Так что у алгоритма «попробовать оба способа и потом сделать проверку» есть некоторое дидактическое преимущество.

3.4.4 Экономическая модель Леонтьева

Сейчас мы расскажем вам то, за что дали Нобелевскую премию (но это не точно).

Представьте себе остров Чунга-чанга, на котором выращивают кокосы и бананы. Местные Чунгачанговцы часть кокосов и бананов съедают сами, остальное отдают своим заокеанским хозяевам.

Предположим для определенности, что при выращивании тонны кокосов они съедают 100 килограмм кокосов и 300 килограмм бананов. При выращивании тонны бананов — 200 килограмм кокосов и 600 килограмм бананов.

Постановка задачи такая: Какой урожай следует запланировать, чтобы вывезти с острова 60 тонн кокосов и 60 тонн бананов?

[6] «Но при перестановке множителей произведение может измениться, что делать, если это произойдет?», спросят самые наблюдательные. По некоторым хитрым причинам, если $A \cdot B = E$, то и $B \cdot A = E$, так что всё в порядке. По научному это называется «левое обратное равно правому обратному».

Для решения введем обозначения: U — таблица с урожаем, X — таблица со съеденным продуктом и V — таблица с вывезенным продуктом. В нашем случае

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

Тут, под первым номером идут кокосы, а под вторым бананы. (Понятно. что если бы выращивали не только кокосы и бананы, а еще и кукурузу и помидоры, то в таблице было бы больше двух чисел).

Между выращенным и съеденным есть очевидная зависимость:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.1 \cdot u_1 + 0.2 \cdot u_2, \\ x_2 &= 0.3 \cdot u_1 + 0.6 \cdot u_2. \end{aligned}$$

Действительно, т.к. при выращивании 1 тонны кокосов съедается 100 кг = 0.1 тонна кокосов, то при выращивании u_1 кокосов съестся $u_1 \cdot 0.1$ кокосов. Аналогично с бананами, на u_2 бананов съестся $u_2 \cdot 0.2$ кокосов. Осталось сложить съеденные кокосы, и получится первое уравнение. Второе получается аналогично.

Между выращенным, съеденным и вывезенным есть очевидная зависимость:

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 + x_1, \\ u_2 &= v_2 + x_2. \end{aligned}$$

Действительно, т.к. всё что не съели то вывезли.

Эти зависимости можно записать в матричном виде:

$$X = A \cdot U \quad \text{и} \quad U = V + X, \tag{19}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

(Кстати, если продуктов не два, а много-много, то зависимости в матричном виде будут те же самые. Вот какие матрицы полезные).

Итак, наша цель — научиться находить запланированный урожай, т.е. U.

Уравнения (19) очень простые, если бы они были «про числа», то вы бы легко выразили U через V. С матрицами это так же просто, но нужно не забывать, что роль 1 теперь играет единичная матрица E:

$$(E - A) \cdot U = V \quad \text{или} \quad U = (E - A)^{-1} \cdot V$$

Осталось найти обратную матрицу и умножить.

Упражнение 31. Погуглите «обратная матрица онлайн», найдите ту самую обратную матрицу и узнайте, какой урожай надо запланировать для вывоза с острова 60 тонн кокосов и 60 тонн бананов.

3.5 Как искать обратную матрицу

Оказывается, для обратной матрицы есть готовая формула. Очень удобно, подставляем в нее числа из матрицы, вычисляем по формулам, и готово. Для матриц размера 2×2 эта формула очень простая:

Утверждение 3. *Если*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{20}$$

то

$$A^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - c \cdot b} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Упражнение 32. Найдите $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$.

Упражнение 33. Перемножьте матрицу (20) с формулой (21) и убедитесь, что мы вас не обманываем.

Для матриц большего размера аналогичные формулы тоже есть, но они ооооочень большие. Так что для матриц размера больше чем 2×2 следует применять

3.5.1 Самый хороший алгоритм поиска обратной матрицы

Даже если вы попали на необитаемый остров, и там совсем нет учебников и справочников, вы сможете найти обратную матрицу наиболее прямолинейным и неинтересным способом — просто решив систему уравнений:

Обозначим $n \times n$ элементов пока неизвестной обратной матрицы $n \times n$ буквами, перемножим и приравняем к единичной. Получится система уравнений из n^2 уравнений с n^2 неизвестными.

Пример 43. Найдем $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^{-1}$. Т.е. найдем числа a, b, c и d в уравнении

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перемножим

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot a + 2 \cdot b & 1 \cdot c + 2 \cdot d \\ 3 \cdot a + 7 \cdot b & 3 \cdot c + 7 \cdot d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и, записав это равенство «поэлементно», получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 \cdot a + 2 \cdot b & & = 1 \\ & 1 \cdot c + 2 \cdot d & = 0 \\ 3 \cdot a + 7 \cdot b & & = 0 \\ & 3 \cdot c + 7 \cdot d & = 1. \end{cases}$$

Решив её, найдем обратную матрицу.

На этом можно было бы и остановиться, но присмотревшись к системе, можно заметить, что она распадается на n систем с n уравнениями, и каждая со своими n неизвестными.

Пример 44. В предыдущем примере можно было бы решать две системы:

$$\begin{cases} 1 \cdot a + 2 \cdot b = 1 \\ 3 \cdot a + 7 \cdot b = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 1 \cdot c + 2 \cdot d = 0 \\ 3 \cdot c + 7 \cdot d = 1. \end{cases}$$

Так что если вас на необитаемом острове n человек, то вы можете «распределить нагрузку» и решать эти системы одновременно.

На этом можно было бы и остановиться, но если вы уже освоили метод элементарных преобразований (про это написано в разделе 1.3 (стр. 2)), то вы сможете заметить, что у этих систем одинаковая левая часть. Значит, и преобразования нужно делать одинаковые.

Упражнение 34. Убедитесь, что эти преобразования такие: Сначала первое уравнение умножить на -3 и прибавить ко второму. Затем второе умножить на -2 и прибавить к первому.

Это значит, что только одному из n вас на острове нужно будет выбирать преобразования и обсчитывать левую часть системы уравнений, а остальным $n-1$ можно будет списывать вычисления в левой части и самостоятельно обсчитывать только правую.

На этом можно было бы и остановиться, но поскольку неизвестные находятся всегда на одних и тех же местах, то можно их не писать, а писать только коэффициенты.

Пример 45. Это таблица — коэффициенты из двух систем из предыдущего примера:

$$\begin{array}{cc|c|} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{|cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{array}$$

«Палочки» вставлены для разделения, они ничего не обозначают. А если не повторять повторяющуюся часть, то это же можно записать более компактно

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \end{array}$$

Таким образом, у вас на необитаемом острове получится таблица с n строками и $2 \cdot n$ столбцами, представляющая из себя n систем уравнений в компактной форме записи. И теперь вы можете в одиночку, одновременно, решить те самые n систем уравнений.

Пример 46. Если к этой удвоенной матрице применить преобразования из упражнения 34, то получится

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}$$

и, превратив эту удвоенную матрицу обратно в системы уравнений, получим:

$$\begin{cases} 1 \cdot a + 0 \cdot b = 7 \\ 0 \cdot a + 1 \cdot b = -3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 1 \cdot c + 0 \cdot d = -2 \\ 0 \cdot c + 1 \cdot d = 1. \end{cases}$$

Так что обратная матрица из примера 43 будет такой:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 35. Проделайте эти преобразования и убедитесь, что мы вас не обманываем.

Именно этот алгоритм поиска обратной матрицы является самым оптимальным и легко программируемым[7].

Если вы на необитаемом острове как бы Робинзон, то ваш Пятница, заглядывая вам через плечо, заметит, что вы просто

1. Записали возле исходной матрицы единичную.
2. Применяли те преобразования по строкам, которые можно применять к системам уравнений, т.е.:
   (a) «Умножить строку на число и прибавить к другой строке»,
   (b) «умножить или поделить строку на ненулевое число» и
   (c) «переставить строки».
3. В тот момент, когда слева образовалась единичная матрица, справа, как по волшебству, появилась обратная.
4. «Ай какой сильный колдунство!» закричит Пятница, упадет перед вами на песок и поставит вашу ногу себе на голову[8].

К сожалению, почти все читатели этого текста запомнят последние четыре пункта и забудут всё остальное.

Ответы на упражнения

Упр. 1. Потому что, что бы вы ни подставили вместо чисел x и y, их разность $x-y$ не может одновременно равняться 1 и 2.
Упр. 2. Ответ на рисунке 5.

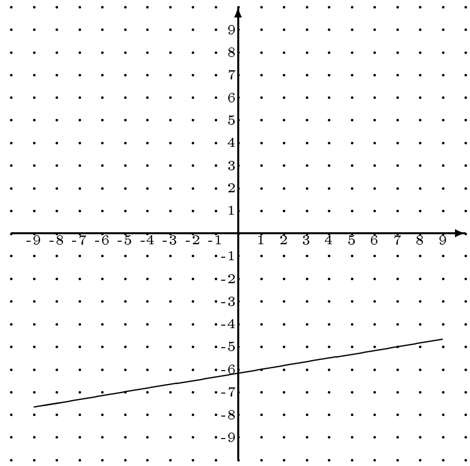

Рис. 5: Ответ к упражнению 2

Упр. 3. Ответ: $y = \frac{1}{6} \cdot x + \frac{-37}{6}$.
Упр. 4. Ответ: $(19; -3)$. Для проверки следует подставить координаты точки пересечения в уравнения прямых:

$$-3 = \frac{1}{5} \cdot 19 + \frac{-34}{5},$$
$$-3 = \frac{1}{6} \cdot 19 + \frac{-37}{6}.$$

Получились два верных равенства, и, значит, всё правильно.
Упр. 5. Для этого следует нарисовать несколько направленных отрезков с одинаковой длиной и одинаковым направлением.
Упр. 6. Ответ: $(12; 15)$.
Упр. 7. Ответ: $(1; 2)$.
Упр. 8. Ответ: $(0; 4)$.
Упр. 9. Ответ: $(4; 3.5)$ и $(6; 4.5)$.
Упр. 10. Ответ: $\sqrt{17}$, $\sqrt{10}$ и $\cos A = 7/\sqrt{170}$.
Упр. 11. Ответ: 5.5.
Упр. 12. Ответ: $(-2; 1)$.
Упр. 13. Ответ: $D = (-2; 3)$ и $C = (1; 0)$. Для решения нужно в качестве $\vec{AD}$ взять противоположный вектор — $(-3; -1)$.
Упр. 14. Ответ: $(1; 0; 0)$. Вместо 1 можно подставить любое другое число.

[7]Ну почти самым. За последнее время много чего напридумывали.

[8]

Упр. 15. Ответ:
$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 4 \cdot t \end{cases}$$

Упр. 16. Ответ: $(3; -4; 4)$. Для решения следует найти уравнения прямых так, как это сделано в примере 20 (стр. 7). Затем найти точку пересечения, как в примере 23 (стр. 7)
Упр. 17. Ответ: Подойдет $(1; 8; 15)$ например. Проверка: $4 \cdot (7-1) + 5 \cdot (8-8) + 6 \cdot (9-15) = 0$.
Упр. 18. Ответ: $(1; 2; -3)$
Упр. 19. Ответ: $(-6; -1; -4;)$. Указание: Сначала найдите проекцию точки на плоскость.
Упр. 20. Ответ: $(-12; 10; -1;)$. Указание: Сначала найдите уравнение прямой, потом проекцию точки на прямую.
Упр. 24. Ответ: Должно получиться что-то типа «рост в сантиметрах минус сто равное весу в килограммах».
Упр. 28. Ну конечно $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Для проверки надо перемножить, что и сделано в примере 37 (стр. 9).
Упр. 29. Ответ: Ну конечно $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ Про это написано в упражнении 28 (стр. 12).
Упр. 30. Ответ: В этот раз правильным ответом будет
$$X = \begin{pmatrix} 19 & -4 \\ 66 & -14 \end{pmatrix}.$$

Упр. 31. Ответ:
$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.33 & 0.67 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Урожай должен быть: 120 тонн кокосов и 240 тонн бананов.
Упр. 32. Ответ:
$$\frac{1}{1 \cdot 4 - 3 \cdot 2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Предметный указатель

вектор, 4
вектор нормали, 7
вершины параллелограмма, 5

главная диагональ матрицы, 11

деление на матрицу, 11
деление отрезка, 5
деление умножением, 11

закрепленный вектор, 4

как найти:
- вектор перпендикулярный плоскости, 8
- вектор по уравнению прямой, 7
- вектор с данным направлением, 6
- вершины квадрата, 6
- вершины параллелограмма, 5
- длины и углы через координаты, 5
- единичную матрицу, 11
- картинку с прямой по уравнению, 3
- координаты
  - вектора по точкам, 4
  - конца вектора, 4
- линию регрессии, 10, 11
- обратную матрицу, 13, 14
- определение обратной матрицы, 12
- параметрическое уравнение прямой, 7
- пересечение
  - прямой и плоскости, 8
  - прямых в пространстве, 7
  - прямых на плоскости, 3
- перпендикулярный вектор (к двум векторам), 6
- перпендикулярный вектор (к одному вектору), 5, 6
- плоскость по точке и двум векторам, 8
- плоскость по трем точкам, 8
- площадь треугольника, 5
- проверить
  - правильность решения системы уравнений, 1
- проекцию точки на плоскость, 8
- проекцию точки на прямую, 9
- произведение матриц, 9
- прямую
  - по двум точкам, 3
- прямую по двум точкам, 7
- решение
  - матричного уравнения, 12
  - систем уравнений, 2
  - системы уравнений, 1, 2
- симметричную точку относительно плоскости, 9
- систему уравнений в матричном виде, 10
- скалярное произведение, 6
- скалярное произведение по координатам, 5
- точку столкновения, 7
- точку, в которой отрезок делится на части, 5
- транспонированную матрицу, 11
- уравнение плоскости по точке и вектору, 7
- Чунга-Чангу, 12

координаты точек, 4

метод исключения неизвестных, 1
метод наименьших квадратов, 10
морской бой, 4

направленный отрезок, 4
неизвестная
- свободная, 2

общее решение
- решение
  - система линейных алгебраических уравнений, 2

операции с векторами, 4

параметр, 6
параметрическое уравнение прямой, 6
пересечение прямых, 7
перпендикулярность векторов, 5, 6
проекция
- точки на плоскость, 8

псевдорешение, 10

свободная неизвестная, 2
свободный вектор, 4
система линейных алгебраических уравнений
- пример, 1
- решение, 1, 2

скалярное произведение, 5, 6
сложение векторов, 4
столкновение, 7

умножение вектора на число, 4

частное решение

решение
система линейных алгебраических уравнений, 2

элементарное преобразование, 2