http://aafin.ru/m/ma.html

Содержание

1 Системы линейных алгебраических уравнений

Система линейных уравнений выглядит примерно так:

$$\begin{cases} y-2x-z=-3 \\ 3x-y+4z=13 \\ 2y+x+5z=20. \end{cases}$$

Для удобства восприятия удобно её записывать в «отформатированном виде»:

Пример 1. Вот красиво записанная система уравнений.

$$\begin{cases} -2\cdot x+\quad y-\quad z=-3 \\ \quad 3\cdot x-\quad y+4\cdot z=\ 13 \\ \qquad\quad x+2\cdot y+5\cdot z=\ 20. \end{cases}$$

Решением системы уравнений называются такие числа, которые после подстановки превращают все уравнения в верные равенства.

Пример 2. Числа $(1;2;3)$ т.е. $x=1$, $y=2$, $z=3$ есть решение системы из примера 1. Действительно, после подстановки и вычислений

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2\cdot 1 & + & 2 & - & 3 & = & -3 \\ 3\cdot 1 & - & 2 & + & 4\cdot 3 & = & 13 \\ 1 & + & 2\cdot 2 & + & 5\cdot 3 & = & 20 \end{array}\right.$$

получим верные равенства.

В природе встречаются системы с несколькими решениями:

Пример 3 (Система с несколькими решениями). Вот система уравнений

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & - & y & = & 0 \\ x & - & y & = & 0 \end{array}\right.$$

Вот её решения:
$x=1$, $y=1$ — одно решение,
$x=2$, $y=2$ — второе решение,
$x=3$, $y=3$ — третье решение, ...

И встречаются системы вообще без решений:

Упражнение 1. Докажите, что у этой системы

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & - & y & = & 1 \\ x & - & y & = & 2 \end{array}\right.$$

нет и не может быть решений.

1.1 Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Основной метод решения — *метод исключения неизвестных.* Его суть в многократном применении заклинания:

Выразить одну неизвестную из одного уравнения и подставить в остальные уравнения.

Заметим, что процесс «выразить и подставить» из раздела 1.1 (стр. 1) можно представлять себе как несколько элементарных преобразований.

Например, взяв систему из примера 1 (стр. 1)

$$\begin{cases} -2\cdot x & + & y & - & z & = & -3 \\ 3\cdot x & - & y & + & 4\cdot z & = & 13 \\ x & + & 2\cdot y & + & 5\cdot z & = & 20 \end{cases}$$

и применив два элементарных преобразования: «первую строчку умножить на 1 и прибавить ко второй» и «первую строчку умножить на -2 и прибавить к третьей», получим систему

$$\begin{cases} -2\cdot x & + & y & - & z & = & -3 \\ x & & & + & 3\cdot z & = & 10 \\ 5\cdot x & & & + & 7\cdot z & = & 26, \end{cases}$$

которая представляет из себя то же, что и система (1 (стр. 2)) (только формула для выражения y осталась в виде первого уравнения).

То, что в случае применения метода «выразить и подставить» называлось «исключение неизвестной», в случае применения метода элементарных преобразования выглядит как «прополка колонки» — в новой системе появляется колонка, в которой почти ничего нет.

Элемент, который «играет активную роль» в «прополке» и который остается в той самой колонке, называется *ведущий элемент*. (В прошлый раз ведущим элементом был y из первого уравнения).

Так вот, для того, чтобы последовательность элементарных преобразований работала так же, как метод исключения неизвестных,

> ведущий элемент следует выбирать в тех строчках, в которых он еще не выбирался.

Так что следующим ведущим элементом следует выбирать что-нибудь из второго или третьего уравнения. Выберем, например, x из второго уравнения и применим: «Умножить второе уравнение на 2 и прибавить к первому» и «умножить второе уравнение на -5 и прибавить к третьему». В результате получится

$$\begin{cases} & & y & - & 5\cdot z & = & 17 \\ x & & & + & 3\cdot z & = & 10 \\ & & & - & 8\cdot z & = & -24. \end{cases}$$

Осталось «прополоть» третью колонку, используя $-8\cdot z$ как ведущий элемент и, получив

$$\begin{cases} & & y & & & = & 1 \\ x & & & & & = & 2 \\ & & & - & 8\cdot z & = & -24, \end{cases}$$

найти ответ.

Отметим, что элементарное преобразование проще (чем метод исключения неизвестной) записывать ручкой на бумаге и проще запрограммировать.

1.4 Задачи про прямую на плоскости

В школе учили, что уравнение прямой на плоскости имеет вид

$$y = k\cdot x + b, \tag{6}$$

где x, y — буквы а k и b — числа.

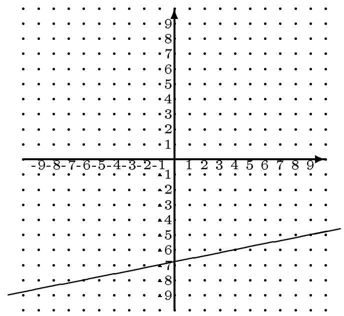

Рис. 1: Картинка с прямой на плоскости

Например, $y=2\cdot x+3$ — уравнение прямой, а $3=2\cdot x+b$ — непонятно что.

Связь между прямой и уравнением осуществляется через координаты:

1. Если координаты точки на прямой подставить в уравнение, то получится верное равенство.

2. Если к числам, которые после подстановки в уравнение прямой дают верное равенство, отнестись как к координатам точки, то эта точка будет на прямой.

Пример 6 (Как нарисовать прямую по уравнению). Уравнение прямой — это как бы система из одного уравнения с двумя неизвестными. Найдем несколько решений так, как написано в разделе 1.2 (стр. 2), посмотрим на решения как на координаты точек, нарисуем эти точки и проведем через них прямую. Обычно хватает двух точек, но для надежности можно нарисовать и больше.

Упражнение 2. Нарисовать прямую $y = \frac{1}{6}\cdot x + \frac{-37}{6}$.

Пример 7 (Как по точкам найти прямую). План действий следующий: берем координаты точек на прямой (достаточно двух точек) и подставляем в «заготовку»

$$y = k\cdot x + b \tag{7}$$

вместо букв x и y. Получится система из нескольких уравнений. Решим её, т.е. найдем значение k и b, и подставим в «заготовку». Вместо букв x и y в «заготовку» ничего подставлять не надо, пусть так буквами и остаются. В результате получится уравнение прямой.

Приступим к реализации: Линия изображена на рисунке 1. Видно, что она проходит через точки с координатами $(-1;7)$ и $(4;-6)$. Подставляем в «заготовку» (7):

$$\begin{cases} 7 = k\cdot(-1) + b \\ -6 = k\cdot 4 \quad + b. \end{cases}$$

Решив систему, получим $k = 1/5$ и $b = -34/5$. Итого:

$$y = \frac{1}{5}\cdot x + \frac{-34}{5}.$$

Для проверки следует подставить координаты тех самых точек (т.е. точек с координатами $(-1;7)$ и $(4;-6)$) в свежеполученное уравнение:

$$7 = \frac{1}{5}\cdot(-1) + \frac{-34}{5},$$
$$-6 = \frac{1}{5}\cdot 4 \quad + \frac{-34}{5}.$$

Получились два верных равенства, и, значит, всё правильно.

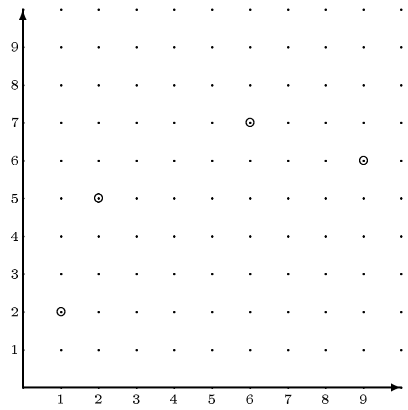

Рис. 2: Точки не на прямой

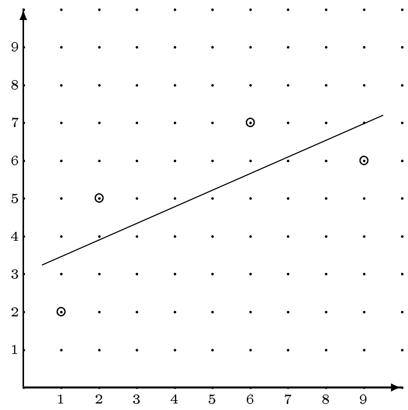

Рис. 3: Прямая вблизи точек

Пример 13. Систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z = 7 \\ 4 \cdot x + 5 \cdot y + 6 \cdot z = 8 \end{cases}$$

можно записать в виде матричного уравнения:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

2.3 Матрицы и метод наименьших квадратов

Выше вы узнали, что матрицы нужны для простой записи сложных формул. Сейчас вы узнаете пример такой формулы.

Как известно, не у всех систем линейных уравнений есть решение. Но что делать, если решения нет, а найти его очень хочется? Такое странное желание возникает естественным образом при обработке не очень точных данных. Как известно, через любые две точки проходит прямая, и вы знаете, что для её нахождения нужно решать систему линейных уравнений (как это делалось в примере 7 (стр. 3)).

Предположим, координаты точки — результат некоторого измерения и этих точек не две а три или больше. Если все измерения идеально точны (как на рисунке 1 (стр. 3)), то можно сделать как раньше, и у вас получится система из более чем двух уравнений с двумя неизвестными и у неё будет решение.

Но что, если из за ошибок измерения эти точки не лежат на одной прямой (как на рисунке 2, например)? В «реальной жизни» выход есть — нужно провести прямую не через точки, а близко от точек (как на рисунке 3). Человеческий мозг — штука мощная, и с этим легко справляется, но как это запрограммировать?

Если попытаться просто действовать так, как будто точки лежат на одной прямой, (т.е. как в примере 7 (стр. 3)) то, вы получите систему у которой нет решения (т.к. точки не лежат на одной прямой), но которую очень хочется решить.

$$\begin{cases} 1 \cdot k + b = 2 \\ 2 \cdot k + b = 5 \\ 6 \cdot k + b = 7 \\ 9 \cdot k + b = 8. \end{cases} \tag{8}$$

Напомним, что решение системы уравнений — это числа, которые после подстановки в уравнения вместо неизвестных превращают все уравнения в верные равенства. Мы будем искать *псевдорешение* — числа, которые после подстановки превращают уравнения в *почти верные* равенства.

Например, посмотрев на рисунок 3, и определив «на глаз»[3] уравнение прямой:

$$y \approx 0.4 \cdot x + 3,$$

можно обнаружить, что числа $k \approx 0.4$ и $b \approx 3$, после подстановки в систему (8), дадут те самые почти верные равенства.

Упражнение 7. Подставьте и проверьте.

В этот момент у вас должно возникнуть два вопроса:

1. Что значит «почти» и «близко»?
2. При чем тут «наименьшие квадраты» и почему нет «наибольших ромбов» например?

Любопытные могут погуглить Википедию, а мы ~~трусливо~~ смело проигнорируем эти и остальные вопросы и перейдем сразу к *алгоритму решения*:

1. Заменяем систему без решения на другую, «улучшенную» систему, у которой решение уже есть.
2. Решение улучшенной системы и будет псевдорешением первой (той, у которой нет решения).

Например, систему (8) заменим на

$$\begin{cases} 121 \cdot k + 18 \cdot b = 126 \\ \ \ 18 \cdot k + \ \ 4 \cdot b = 22. \end{cases} \tag{9}$$

(Почему именно на неё, написано ниже, в примере 15 (стр. 6)). Её решением как раз и будут $k = 18/41 \approx 0.439024$ и $b = 124/41 \approx 3.02439$. И та самая линия на рисунке 3 задается уравнением

$$y = 0.439024 \cdot x + 3.02439.$$

Замечание 1. Кстати, линия на рисунке 3 по научному называется *линией регрессии*, а система уравнений (9) называется *нормальной системой уравнений.*

[3]Этому учат в школе. Если вас не научили, не переживайте, для решения задачек этот навык не понадобится.

Пример обратной матрицы приведен выше, в примере 12 (стр. 4).

Упражнение 12. Какой будет матрица, обратная к $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$?

Замечание 2. Кроме того:

1. Обратные матрицы бывают только у «квадратных» матриц. Даже если произведение двух «прямоугольных» матриц равно единичной (не слабо ли вам придумать пример таких матриц?), называть одну из них обратной воспрещается.

2. У некоторых матриц обратной нет. Например, у матрицы, состоящей только из нулей. Но не только у неё.

3. Подобно числам, обратную матрицу обозначают «минус первой степенью».

4. Если вы скажете на экзамене, что «Обратная матрица это матрица в минус первой степени», вам поставят двойку.

Упражнение 13. Чему равна $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^{-1}$?

2.4.3 Матричные уравнения

С помощью обратной матрицы можно делать примерно то же, что и с числами при помощи деления, т.е. решать уравнения.

Пример 17 (Задача про матричные уравнения). Дано уравнение

$$A \cdot X = Y,$$

например

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 24 & 34 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Нужно найти матрицу X.

Если бы это были просто числа, то вы бы поделили (или умножили на обратное число). Мы тоже будем умножать на обратную матрицу (её возьмем из упражнения 12), но с какой стороны умножать? Сейчас мы испытаем оба способа и выберем подходящий.

Испытание первое:

$$X = A^{-1} \cdot Y$$

или

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 24 & 34 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 24 & 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Испытание второе:

$$X = Y \cdot A^{-1}$$

или

$$X = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 24 & 34 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \\ = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 24 & 34 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -4 \\ 66 & -14 \end{pmatrix}.$$

Получилось «два ответа», но правильный из них только один. Чтобы узнать, который, следует сделать проверку, т.е. подставить X в исходное уравнение (10):

Проверка первого варианта:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 24 & 34 \end{pmatrix}.$$

Ураааа!!! Сошлось!

Проверка второго (на всякий случай):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 19 & -4 \\ 66 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 151 & -32 \\ 519 & -110 \end{pmatrix}.$$

Не сошлось.

Итак, правильный ответ:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 14. Решите другое уравнение:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 24 & 34 \end{pmatrix}.$$

Указание для преподавателей, которое из-за технической ошибки попало в текст методички: Конечно, правильней было бы рассказать про умножения обеих частей равенства на обратную матрицу с одной стороны для одного уравнения:

$$A \cdot X = Y \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot Y \Rightarrow \\ \Rightarrow E \cdot X = A^{-1} \cdot Y \Rightarrow X = A^{-1} \cdot Y,$$

и, аналогично, с другой стороны для другого. Но практика показывает, что основной контингент проигнорирует все объяснения и просто попытается запомнить, с какой стороны умножать. На контрольной всё перепутает и проверку делать не будет. Так что у алгоритма «попробовать оба способа и потом сделать проверку» есть некоторое дидактическое преимущество.

2.4.4 Экономическая модель Леонтьева

Сейчас мы расскажем вам то, за что дали Нобелевскую премию (но это не точно).

Представьте себе остров Чунга-чанга, на котором выращивают кокосы и бананы. Местные Чунгачанговцы часть кокосов и бананов съедают сами, остальное отдают своим заокеанским хозяевам.

Предположим для определенности, что при выращивании тонны кокосов они съедают 100 килограмм кокосов и 300 килограмм бананов. При выращивании тонны бананов — 200 килограмм кокосов и 600 килограмм бананов.

Постановка задачи такая: Какой урожай следует запланировать, чтобы вывезти с острова 60 тонн кокосов и 60 тонн бананов?

Для решения введем обозначения: U — таблица с урожаем, X — таблица со съеденным продуктом и V — таблица с вывезенным продуктом. В нашем случае

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

Тут, под первым номером идут кокосы, а под вторым бананы. (Понятно. что если бы выращивали не только кокосы

На этом можно было бы и остановиться, но поскольку неизвестные находятся всегда на одних и тех же местах, то можно их не писать, а писать только коэффициенты.

Пример 20. Это таблица — коэффициенты из двух систем из предыдущего примера:

$$\begin{array}{cc|c|c|cc|c} 1 & 2 & 1 & & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & & 3 & 7 & 1 \end{array}$$

«Палочки» вставлены для разделения, они ничего не обозначают. А если не повторять повторяющуюся часть, то это же можно записать более компактно

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \end{array}$$

Таким образом, у вас на необитаемом острове получится таблица с n строками и $2 \cdot n$ столбцами, представляющая из себя n систем уравнений в компактной форме записи. И теперь вы можете в одиночку, одновременно, решить те самые n систем уравнений.

Пример 21. Если к этой удвоенной матрице применить преобразования из упражнения 18, то получится

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}$$

и, превратив эту удвоенную матрицу обратно в системы уравнений, получим:

$$\begin{cases} 1 \cdot a + 0 \cdot b = 7 \\ 0 \cdot a + 1 \cdot b = -3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 1 \cdot c + 0 \cdot d = -2 \\ 0 \cdot c + 1 \cdot d = 1. \end{cases}$$

Так что обратная матрица из примера 18 будет такой:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 19. Проделайте эти преобразования и убедитесь, что мы вас не обманываем.

Именно этот алгоритм поиска обратной матрицы является самым оптимальным и легко программируемым[6].

Если вы на необитаемом острове как бы Робинзон, то ваш Пятница, заглядывая вам через плечо, заметит, что вы просто

1. Записали возле исходной матрицы единичную.
2. Применяли те преобразования по строкам, которые можно применять к системам уравнений, т.е.:
   (a) «Умножить строку на число и прибавить к другой строке»,
   (b) «умножить или поделить строку на ненулевое число» и
   (c) «переставить строки».
3. В тот момент, когда слева образовалась единичная матрица, справа, как по волшебству, появилась обратная.
4. «Ай какой сильный колдунство!» закричит Пятница, упадет перед вами на песок и поставит вашу ногу себе на голову[7].

К сожалению, почти все читатели этого текста запомнят последние четыре пункта и забудут всё остальное.

[6] Ну почти самым. За последнее время много чего напридумывали.

[7] bit.ly/3agwX69

3 Аналитическая геометрия

Как вы помните из школы, геометрия состоит из прямых, отрезков, треугольников, длин, углов и прочих геометрических объектов, которые можно рисовать, смотреть на них глазами и измерять линейками и транспортирами.

И даже ваши любимые компьютерные игрушки снаружи выглядят, как эти самые геометрические объекты, соединенные между собой, но внутри компьютера только числа, как вы, наверное, знаете.

В связи с этим возникает исключительно важная задача — превратить все эти отрезки, углы и треугольники в числа для последующего засовывания в компьютер.

Это делается с помощью метода координат, с которым знакомы все игравшие в «морской бой»: на плоскости рисуется воображаемая «бумага в клеточку», у точек появляются координаты, и эти числа — координаты — и будут обрабатываться компьютером.

Геометрические действия типа соединения и разделения геометрических фигур, а также измерения длин и углов, делаются с помощью большого количества специальных формул. Этих формул очень много, но у них есть повторяющиеся части, и мы поступим как программисты — оформим эти части в виде подпрограмм.

Две основные части, которым мы и уделим максимум внимания — вектор (раздел 3.1) и скалярное произведение (раздел 3.3 (стр. 10)).

3.1 Вектора и направленные отрезки

Направленный отрезок — это отрезок, к которому присовали стрелочку, т.е., получится отрезок, один конец которого называется «начало направленного отрезка», а другой конец (тот, что со стрелочкой) называется «конец направленного отрезка».

Вектор — это длина и направление в одном флаконе. Например, «три метра» это длина, «вверх» — направление, а «три метра вверх» — вектор.

Вектор отличается от направленного отрезка тем же, чем длина отличается от отрезка, и направление отличается от стрелочки:

1. Вектор нельзя нарисовать (вы не сможете нарисовать «три метра вверх»), но можно нарисовать направленный отрезок с такой же длиной и направлением (видели в лесу трехметровую ёлочку?).
2. Вектора с одинаковыми длинами и направлениями равны («три метра вверх» это «три метра вверх»), но можно нарисовать несколько направленных отрезков с одинаковой длиной и направлением (в лесу много трехметровых ёлочек).
3. У вектора нет начала и нет конца (где начинается три метра вверх?), но они есть у направленного отрезка.

Предостережение: Изображение лица на фотографии иногда называют «лицо на фотографии», и это обычно не вызывает недоразумений, так как только немногие могут подумать, что это кожу с черепа содрали и на бумажку приклеили. Аналогично, направленный отрезок тоже иногда называют вектором (но имеют в виду именно направленный отрезок), и про вектор говорят то, что можно говорить только про направленный отрезок. Например, фраза «вектор идущий от точки A к точке B» обычно означает

$\boxed{\text{сумма произведений координат.}}$

Само скалярное произведение обозначается «скобочками» — $(\vec{a}, \vec{b})$. Иногда его обозначают «точкой» — $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или «острыми скобочками» — $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$.

Пример 26. Если $\vec{a} = (1; 2)$ и $\vec{b} = (3; 4)$, то их скалярное произведение

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11.$$

У числа, найденного по формуле (14), есть геометрический смысл — это произведение длин векторов на косинус угла между ними.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha), \tag{15}$$

где $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ — длины векторов, а α — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3.3.1 Нахождение длин и углов через координаты

Если применить формулу (15) «в обратную сторону», то получим формулы для нахождения длин и углов через скалярное произведение:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}, \quad \cos(\alpha) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}, \tag{16}$$

где α — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Упражнение 25. В треугольнике ABC координаты точек $A = (1; 1)$, $B = (2; 5)$ и $C = (4; 2)$. Найдите длины отрезков AB и AC. Найдите угол A (или хотя бы его косинус).

Упражнение 26. Найдите площадь треугольника из упражнения 25. (Подсказка: используйте формулу про произведение длин сторон на синус угла. Синус можно найти «через косинус»).

3.3.2 Условие перпендикулярности векторов

Из формулы (15) видно, что выполняется

Утверждение 3. *Два вектора перпендикулярны друг другу, если их скалярное произведение равно нулю.*

И наоборот, если два вектора перпендикулярны друг другу, то их скалярное произведение равно нулю.

Это позволяет легко проверять перпендикулярность.

Пример 27. $\vec{a} = (1; 2)$ перпендикулярен $\vec{b} = (20; -10)$ т.к. $(\vec{a}, \vec{b}) = 1 \cdot 20 + 2 \cdot (-10) = 0$. $\vec{a} = (1; 2)$ не перпендикулярен $\vec{d} = (3; 4)$ т.к. $(\vec{a}, \vec{d}) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \neq 0$.

Пример 28 (Задача про перпендикулярный вектор). Дан вектор на плоскости. Например, $\vec{a} = (1; 2)$. Нужно придумать перпендикулярный к нему вектор.

Будем искать нужный вектор в виде $\vec{b} = (x; y)$. Вспомним про критерий перпендикулярности из утверждения 3 и составим уравнение с двумя неизвестными:

$$1 \cdot x + 2 \cdot y = 0.$$

У него много решений, но нам достаточно найти одно. Ясно, что $x = 2$ и $y = -1$ подойдет.

Кстати, вектор $(2; -1)$ не только перпендикулярен $\vec{a}$, у него еще и длина такая же. (Т.к. $\sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{1^2 + (2)^2}$).

Упражнение 27. Найдите еще один вектор, тоже перпендикулярный $\vec{a}$ и с длиной как у $\vec{a}$.

Пример 29 (Задача про квадрат). Даны две соседние вершины квадрата: $A = (1; 4)$ и $B = (2; 1)$. Найти оставшиеся вершины B и D.

Ясно, что у задачи два решения, оставшиеся вершины могут быть с одной стороны от отрезка AB или с другой стороны от отрезка.

Решать будем так: по заклинанию «из конца вычесть начало» найдем вектор $\vec{AB} = (1; -3)$ (как это сделано в 3.2). Найдем один из перпендикулярных к нему векторов, как это сделано в примере 28. Например, можно считать, что $\vec{AD} = (3; 1)$. По точке A и вектору $\vec{AD}$ найдем координаты точки D (как это сделано в 23). Теперь мы знаем три точки в квадрате, и четвертую можно найти как в задаче 24, $C = (5; 2)$.

Упражнение 28. Найдите второе решение, т.е. вершины квадрата с другой стороны от отрезка AB.

Пример 30 (Задача про два вектора с одним направлением). Один вектор направлен в ту же сторону, что и другой. У одного известны координаты (например, $\vec{a} = (3; 4)$), у другого длина (например, $|\vec{b}| = 15$). Найти координаты второго вектора.

Решать можно так: сначала найдем длину первого вектора по формуле 16:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \sqrt{3 \cdot 3 + 4 \cdot 4} = 5.$$

Видно, что длина первого вектора в три раза меньше длины второго. Следовательно, если умножить первый вектор на 3, то как раз получится второй:

$$\vec{b} = 3 \cdot \vec{a} = 3 \cdot (3; 4) = (9; 12).$$

3.4 Вектора и координаты в пространстве

В пространстве всё почти так же, как и на плоскости, за исключением:

1. Система координат теперь уже не «крестик», а что-то вроде «угла комнаты». Погуглив «система координат в пространстве картинки», можно её как следует рассмотреть.
2. Координаты в пространстве — это три числа, а не два.
3. Для нахождения скалярного произведения вместо формулы 14 (стр. 10) следует применять формулу

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha_1 \cdot \beta_1 + \alpha_2 \cdot \beta_2 + \alpha_3 \cdot \beta_3, \tag{17}$$

где $\vec{a} = (\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3)$ и $\vec{b} = (\beta_1; \beta_2; \beta_3)$ — координаты векторов.

Пример 31 (Задача про построение перпендикулярного вектора в пространстве). Дан вектор в пространстве (например $\vec{a} = (1; 2; 3)$). Найти перпендикулярный к нему.

Для наглядности, поднимите руку вверх (это будет как бы вектор). Ручка, лежащая на столе, перпендикулярна руке, т.е. как раз то, что нужно. Кстати, если на столе лежит несколько ручек, то они все как раз то, что нужно, т.е. у задачи много решений.

Для нахождения координат воспользуемся утверждением 3 (стр. 11). Если $\vec{b} = (x; y; z)$ — искомый вектор, то должно выполняться равенство

$$1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z = 0.$$

Найти точку пересечения.

Будем считать, что это уравнения движения двух автомобильчиков, и будем искать точку пересечения их траекторий.

Точка пересечения траекторий — это когда два автомобиля находятся в одном месте, но не обязательно в одно время. (Время разное, и этим задача о пересечении отличается от задачи о столкновении из примера 34).

Для решения мы обозначим время в уравнениях движения разных автомобильчиков разными буквами

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot \alpha \\ y = 2 + 1 \cdot \alpha \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 6 + 1 \cdot \beta \\ y = 2 + 2 \cdot \beta \end{cases}$$

и соединим их в одну систему:

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot \alpha \\ y = 2 + 1 \cdot \alpha \\ x = 6 + 1 \cdot \beta \\ y = 2 + 2 \cdot \beta. \end{cases}$$

Решив её, получим $x = 7$, $y = 4$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$.

Таким образом, точка пересечения прямых — $(7; 4)$. Если представлять эти прямые как траектории автомобильчиков, то мы также узнали, что первый автомобильчик был в этой точке в момент времени 2 а второй в момент времени 1.

Упражнение 31. Первая прямая проходит через точки $(9; -1; 10)$ и $(11; 0; 12)$. Вторая прямая проходит через точки $(3; -4; 9)$ и $(3; -4; 10)$. Найдите точку пересечения этих прямых.

3.6 Плоскость в пространстве

Плоскость можно представлять себе как поверхность лужи. Она такая плоская потому, что её расплющивает гравитация, направленная перпендикулярно поверхности лужи. Вот почему для написания уравнения достаточно знать две вещи — точку на плоскости и перпендикулярный к плоскости вектор.

Определение 3. *Если координаты точки на плоскости — $(x_0; y_0; z_0)$, а координаты вектора, перпендикулярного плоскости — $(A; B; C)$ (он называется* вектор нормали *к плоскости), то уравнение плоскости записывается так:*

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0. \qquad (20)$$

Пример 37. Если координаты точки $(1; 2; 3)$, а координаты вектора $(4; 5; 6)$, то уравнение запишется так:

$$4 \cdot (x - 1) + 5 \cdot (y - 2) + 6 \cdot (z - 3) = 0.$$

Буквы x, y и z — координаты произвольной точки на плоскости. Если вместо них подставить координаты точки на плоскости, то получится верное равенство, если не на плоскости — неверное.

Замечание 4. Левая часть уравнения плоскости похожа на скалярное произведение. А именно, скалярное произведение вектора нормали на вектор, соединяющий две точки на плоскости. И это скалярное произведение приравнивается к нулю. Помедитируйте над этим.

Пример 38 (Пример проверки лежит — не лежит). Вопрос: точка с координатами $(7; 8; 9)$ лежит на плоскости из примера 37 или нет?

Для проверки подставим:

$$4 \cdot (7 - 1) + 5 \cdot (8 - 2) + 6 \cdot (9 - 3) =$$

и вычислим

$$= 90 \neq 0.$$

Как видите, не равно нулю, и, значит, не лежит. А если бы было равно нулю, то лежало бы.

Упражнение 32. Придумайте точку, которая лежит на плоскости из примера 37.

Замечание 5. Скобки в уравнении можно раскрыть, получится то же самое уравнение, но с раскрытыми скобками. Выглядеть оно будет так:

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0,$$

где D — некоторое число.

Пример 39 (уравнение с раскрытыми скобками). Уравнение плоскости из примера 37 после раскрытия скобок будет таким:

$$4 \cdot x + 5 \cdot y + 6 \cdot z - 32 = 0.$$

На самом деле, в примерах 37 и 39 не два разных уравнения а, одно и то же уравнение — с раскрытыми скобками и с нераскрытыми скобками.

Пример 40 (Как извлечь информацию из уравнения плоскости). Если вам дали уравнение плоскости (такое как (37) или (39)), то по числам из уравнения можно извлечь полезную информацию — координаты вектора, перпендикулярного плоскости. Это будут коэффициенты при переменных x, y и z.

Упражнение 33. Какой вектор перпендикулярен плоскости

$$x + 2 \cdot y - 3 \cdot z + 4 = 0?$$

Пример 41 (Плоскость по точке и двум векторам). Предположим, вам дали координаты точки на плоскости (например, $(3; 2; 1)$) и координаты двух векторов, параллельных плоскости (например, $(1; 2; 3)$ и $(4; 5; 6)$), и велели найти уравнение этой плоскости.

Посмотрев на определение 3 (стр. 13), вы увидите, что вам не хватает вектора, перпендикулярного плоскости, т.е. перпендикулярного тем самым двум векторам.

Сделав всё так же, как в примере 32 (стр. 12), найдем этот вектор (это будет $(1; -2; 1)$) и составим уравнение плоскости так, как это сделано в примере 37 (стр. 13):

$$1 \cdot (x - 3) - 2 \cdot (y - 2) + 1 \cdot (z - 1) = 0.$$

Если раскрыть скобки (хотя это и не обязательно), получим

$$x - 2 \cdot y + z = 0.$$

Пример 42 (Плоскость по трем точкам). Предположим, вам дали координаты трех точек на плоскости (например, $A = (3; 2; 1)$, $B = (4; 4; 4)$ и $C = (7; 7; 7)$) и хотят получить от вас уравнение этой плоскости.

Это легко, по паре точек на плоскости найдем вектор, лежащий на плоскости (так, как это сделано в примере 22 (стр. 10)) и сведем задачу к предыдущей: $\vec{AB} = (4; 4; 4) - (3; 2; 1) = (1; 2; 3)$ и $\vec{AC} = (7; 7; 7) - (3; 2; 1) = (4; 5; 6)$. И дальше всё, как в примере 41.

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad x' = 1, \quad (\text{число})' = 0, \tag{22}$$
$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x, \tag{23}$$
$$(e^x)' = e^x, \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}. \tag{24}$$

Таблица 1: Производные популярных функций

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}, \tag{25}$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{26}$$
$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}. \tag{27}$$

Таблица 2: Производные менее популярных функций

Пример 47.

$$\begin{aligned}
&(x^3 - 5 \cdot x^2 + \pi \cdot x - 17)' = \\
&\quad = (x^3)' - (5 \cdot x^2)' + (\pi \cdot x)' - (17)' = \\
&\quad = (x^3)' - 5 \cdot (x^2)' + \pi \cdot (x)' - (17)' = \\
&\quad = 3 \cdot x^2 - 5 \cdot 2 \cdot x + \pi \cdot 1 - 0 = \\
&\quad = 3 \cdot x^2 - 10 \cdot x + \pi.
\end{aligned}$$

4.2 Таблица производных

В математике встречается много различных функций, и для них для всех существуют свои собственные правила дифференцирования. В таблице 1 приведены производные наиболее популярных функций, их необходимо запомнить. В таблице 2 приведены производные менее популярных функций, но и их тоже неплохо было бы запомнить.

4.3 Производная сложной функции

Функции можно подставлять в другие функции.

Пример 48. $\sin(\ln x)$ — это функция $\ln x$, подставленная в $\sin(\quad)$.

$\ln(\sin x)$ — это функция $\sin x$, подставленная в $\ln(\quad)$.

$\sin(x^2)$ — это функция x^2, подставленная в $\sin(\quad)$.

$\big(\sin(x)\big)^2$ — это[11] функция $\sin(x)$, подставленная в $(\qquad)^2$.

Можно подставлять функции друг в друга много раз.

Пример 49. $\sin\big((\ln(x^3))^2\big)$ — это[12] функция x^3, вставленная внутрь $\ln(\quad)$, который вставлен внутрь $(\qquad)^2$, который вставлен внутрь $\sin(\qquad)$.

То, что получается в результате, называется *сложной функцией*[13].

Для сложных функций есть специальные правила дифференцирования, но для того, чтобы этими правилами пользоваться, нужно научиться отличать внешнюю функцию от внутренних.

[11]Предостережение: вместо $\big(\sin(x)\big)^2$ часто пишут $\sin^2(x)$.

[12]Вам может встретиться выражение $\sin(\ln^2(x^3))$. Не пугайтесь, это то же самое.

[13]Иногда её называют *композицией* или *суперпозицией* функций.

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u', \tag{28}$$
$$(\sin u)' = (\cos u) \cdot u', \qquad (\cos u)' = -(\sin u) \cdot u', \tag{29}$$
$$(e^u)' = e^u \cdot u', \qquad (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'. \tag{30}$$

Таблица 3: Производные популярных функций в виде сложной функции

Пример 50. У $\sin(\ln x)$ внутренняя функция — $\ln x$, внешняя — $\sin(\quad)$.

У $\ln(\sin x)$ внутренняя функция — $\sin x$, внешняя — $\ln(\quad)$.

У $\sin(x^2)$ внутренняя функция — x^2, внешняя — $\sin(\quad)$.

У $\big(\sin(x)\big)^2$ внутренняя функция — $\sin(x)$, внешняя — $(\qquad)^2$.

Пример 51. У $\sin\big((\ln(x^3))^2\big)$ внутренняя функция — $(\ln(x^3))^2$, внешняя — $\sin(\qquad)$.

Отличать внешнее от внутреннего можно с помощью следующего правила:

Правило 4. *Предположим, вместо x подставили число, и теперь нужно вычислить значение получившегося выражения. Мысленно представим себе последовательность действий при вычислении. Последнее действие в этой воображаемой последовательности и есть внешняя функция, а всё остальное — внутренние функции.*

Пример 52. Подставим 100500 вместо x в $\sin((\ln(x^3))^2)$. При вычислении $\sin((\ln(100500^3))^2)$, сначала вам придется искать 100500^3, затем $\ln(\text{какое-то число})$, затем $(\text{какое-то число})^2$, и последним действием будет вычисление $\sin(\text{какое-то число})$. Значит, $\sin(\qquad)$ и есть внешняя функция, а $(\ln(x^3))^2$ — внутренняя.

Теперь мы можем показать вам

Правило 5 (производная сложной функции)**.**

$$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x).$$

Его применение кажется несложным:

Пример 53. У $\sin(x^2)$ внутренняя функция (как бы g) — x^2, внешняя (как бы f) — $\sin(\quad)$. По правилу 3 (стр. 14), $(x^2)' = 2 \cdot x$, по формуле (23) из таблицы 1 (стр. 15), $\big(\sin(\quad)\big)' = \cos(\quad)$, и в результате получится

$$\big(\sin(x^2)\big)' = \cos(x^2) \cdot 2 \cdot x.$$

Пример 54. У $\big(\sin(x)\big)^2$ внутренняя функция — $\sin(x)$, внешняя — $(\qquad)^2$. По тем же правилам, что и в предыдущем примере $\big(\sin(x)\big)' = \cos(x)$ и $\big((\qquad)^2\big)' = 2 \cdot (\qquad)$. И в результате получится

$$\big((\sin(x))^2\big)' = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x).$$

К сожалению, не все могут научиться пользоваться правилом 5, но мы им поможем и повторим правила дифференцирования в варианте «для сложной функции» в таблицах 3 и 4.

В некоторых случаях правило 5 придется применять несколько раз:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}, \qquad (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{u}}\cdot u', \qquad (34)$$

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\cdot(\sqrt[n]{x})^{n-1}}, \qquad (\sqrt[n]{u})' = \frac{1}{n\cdot(\sqrt[n]{u})^{n-1}}\cdot u', \qquad (35)$$

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-n}{x^{n+1}}, \qquad \left(\frac{1}{u^n}\right)' = \frac{-n}{u^{n+1}}\cdot u', \qquad (36)$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}, \qquad (\log_a u)' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{u}\cdot u', \qquad (37)$$

$$(a^x)' = \ln a\cdot a^x, \qquad (a^u)' = \ln a\cdot a^u\cdot u'. \qquad (38)$$

Таблица 5: Производные еще нескольких функций

4.6 Производные корней, логарифмов и степеней

Дифференцирование некоторых функций, не вошедших в таблицы 3 и 4, может быть проделано после преобразований.

Разнообразные корни

$$\sqrt{x}, \quad \sqrt[3]{x}, \quad \sqrt[4]{x}, \ \ldots$$

на самом деле всего лишь дробные степени

$$x^{\frac{1}{2}}, \quad x^{\frac{1}{3}}, \quad x^{\frac{1}{4}}, \ \ldots,$$

и к ним нужно применять формулу (22) из таблицы 1 (стр. 15):

$$\sqrt{x}\,' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}.$$

Аналогично,

$$\sqrt[3]{x}\,' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\cdot(\sqrt[3]{x})^2}.$$

Выражение $1/(x^n)$ не обязательно дифференцировать по правилу «производная дроби», можно вспомнить про отрицательные степени и опять применить формулу (22) из таблицы 1.

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = (x^{-n})' = -n\cdot x^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}}.$$

Дифференцирование логарифмов сводится к формуле (24) из таблицы 1:

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}\cdot(\ln x)' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}.$$

Степень дифференцируется по формуле (30) из таблицы 3 (стр. 15):

$$(a^x)' = \left(\left(e^{\ln a}\right)^x\right)' = \left(e^{(\ln a)\cdot x}\right)' = e^{(\ln a)\cdot x}\cdot\ln a = \ln a\cdot a^x.$$

Для удобства использования мы выписали производные этих функций в отдельную таблицу 5.

4.7 Производная показательно-степенных функций

Так называют функцию в степени функция.

Пример 62. Всё это показательно-степенные функции:

$$x^x, \quad (\sin x)^{\cos x}, \quad (\ln x)^{(x^2)}, \quad \ldots$$

При дифференцировании выражения вида $(u^v)'$ нельзя применять правило 3 (стр. 14), т.к. v не константа. И формулу (38) из таблицы 5 тоже нельзя, т.к. u не константа. Но можно применить прием из раздела 4.6 (стр. 17):

$$(u^v)' = \left((e^{\ln u})^v\right)' = (e^{\ln u\cdot v})' = e^{\ln u\cdot v}\cdot(\ln u\cdot v)' =$$

и, применив правило 6 (стр. 16) и формулу (30) из таблицы 3 (стр. 15), получим

$$= e^{\ln u\cdot v}\cdot\left((\ln u)'\cdot v + \ln u\cdot v'\right) = u^v\cdot\left(\frac{u'}{u}\cdot v + \ln u\cdot v'\right).$$

Пример 63.

$$\left(x^{\sin(x)}\right)' = \left(x^{\sin(x)}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\cdot\sin(x) + \ln x\cdot\cos(x)\right).$$

4.8 Смысл производной

Одно из важных, часто используемых, но не всегда понимаемых математических понятий — функция.

Функция — это когда одна величина зависит от другой.

Когда вы говорите «чем больше тем лучше», вы упоминаете зависимость между величинами — той, «которая больше», и той, «которая лучше»[14].

Функции можно записывать с помощью формул, этим вы в школе и занимались. Исторически так сложилось, что ту величину, «от которой зависит», обозначают буквой x и называют *аргумент* функции, а ту, «которая зависит», обозначают буквой y и называют *значение* функции.

Функции можно рисовать в виде графиков, при подготовке к ЕГЭ вы их часто видели. Математики стараются ту величину, «от которой зависит», откладывать по горизонтали, а другую, «которая зависит», по вертикали. Но это не обязательно, иногда рисуют наоборот.

4.8.1 Возрастание, убывание и производная

Как известно функции могут возрастать (это когда чем больше аргумент, тем больше значение) и убывать (это когда наоборот)

Бывает так, что функция где-то возрастает и где-то убывает, и это связано с производной. В ЕГЭ было много задач про возрастание — убывание и производную, для тех кто это не осилил в школе, мы попробуем объяснить всё это ещё раз ещё более понятными словами:

Как известно, скорость автомобильчика может возрастать, а может убывать. А может и не меняться. Как известно водителям автомобильчиков, возрастание и убывание скорости связано с педалями Газ и Тормоз, надеемся, вы понимаете как.

По тому, на какую педаль нажал водитель, можно догадаться, что происходит со скоростью, возрастает она или убывает. И наоборот, по возрастанию и убыванию скорости можно догадаться, какая педаль нажата.

[14] Так что, оказывается, вы часто используете функции в обычной жизни. А еще вы говорите прозой.

И, подставив функцию спроса (39) вместо y, найдем формулу зависимости навара от цены:

$$N = (-10 \cdot x + 1400) \cdot (x - 50)$$

Осталось найти максимум, как вас учили при подготовке к ЕГЭ.

Упражнение 38. Найдите производную, приравняйте к нулю, найдите максимум, найдите цену, при которой навар самый большой, найдите, сколько штучек купят при такой цене и найдите какой будет навар.

Ответы на упражнения

Упр. 1. Потому что, что бы вы ни подставили вместо чисел x и y, их разность $x - y$ не может одновременно равняться 1 и 2.
Упр. 2. Ответ на рисунке 5.

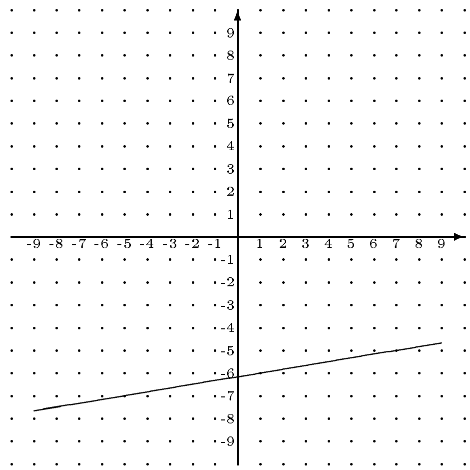

Рис. 5: Ответ к упражнению 2

Упр. 3. Ответ: $y = \frac{1}{6} \cdot x + \frac{-37}{6}$.
Упр. 4. Ответ: $(19; -3)$. Для проверки следует подставить координаты точки пересечения в уравнения прямых:

$$-3 = \frac{1}{5} \cdot 19 + \frac{-34}{5},$$
$$-3 = \frac{1}{6} \cdot 19 + \frac{-37}{6}.$$

Получились два верных равенства, и, значит, всё правильно.
Упр. 8. Ответ: Должно получиться что-то типа «рост в сантиметрах минус сто равно весу в килограммах».
Упр. 12. Ну конечно $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Для проверки надо перемножить, что и сделано в примере 12 (стр. 4).
Упр. 13. Ответ: Ну конечно $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ Про это написано в упражнении 12 (стр. 7).
Упр. 14. Ответ: В этот раз правильным ответом будет

$$X = \begin{pmatrix} 19 & -4 \\ 66 & -14 \end{pmatrix}.$$

Упр. 15. Ответ:

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.33 & 0.67 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Урожай должен быть: 120 тонн кокосов и 240 тонн бананов.
Упр. 16. Ответ:

$$\frac{1}{1 \cdot 4 - 3 \cdot 2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Упр. 20. Для этого следует нарисовать несколько направленных отрезков с одинаковой длиной и одинаковым направлением.
Упр. 21. Ответ: $(12; 15)$.
Упр. 22. Ответ: $(1; 2)$.
Упр. 23. Ответ: $(0; 4)$.
Упр. 24. Ответ: $(4; 3.5)$ и $(6; 4.5)$.
Упр. 25. Ответ: $\sqrt{17}$, $\sqrt{10}$ и $\cos A = 7/\sqrt{170}$.
Упр. 26. Ответ: 5.5.
Упр. 27. Ответ: $(-2; 1)$.
Упр. 28. Ответ: $D = (-2; 3)$ и $C = (1; 0)$. Для решения нужно в качестве $\vec{AD}$ взять противоположный вектор — $(-3; -1)$.
Упр. 29. Ответ: $(1; 0; 0)$. Вместо 1 можно подставить любое другое число.
Упр. 30. Ответ:

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 4 \cdot t \end{cases}$$

Упр. 31. Ответ: $(3; -4; 4)$. Для решения следует найти уравнения прямых так, как это сделано в примере 33 (стр. 12). Затем найти точку пересечения, как в примере 36 (стр. 12)
Упр. 32. Ответ: Подойдет $(1; 8; 15)$ например. Проверка: $4 \cdot (7 - 1) + 5 \cdot (8 - 8) + 6 \cdot (9 - 15) = 0$.
Упр. 33. Ответ: $(1; 2; -3)$
Упр. 34. Ответ: $(-6; -1; -4;)$. Указание: Сначала найдите проекцию точки на плоскость.
Упр. 35. Ответ: $(-12; 10; -1;)$. Указание: Сначала найдите уравнение прямой, потом проекцию точки на прямую.
Упр. 37. Ответ: Наша функция спроса — слишком грубое приближение к реальности. В среднем диапазоне цен оно имеет смысл, при слишком больших или слишком маленьких ценах — не имеет смысла.
Упр. 38. Ответ: $N' = (-10) \cdot (x - 50) + (-10 \cdot x + 1400)$, наилучшая цена — 95, купят 450 штучек (именно столько и надо закупить в оптовом магазине), навар на этой операции будет 20250.

Предметный указатель