Так вот, у функции тоже есть свои педали. Но педали для функции — это тоже функция, и именно она и называется *производная функции.*

Например, для x^2 этими педалями — производной будет функция $2 \cdot x$.

Как по производной определить, Газ нажат или Тормоз? А вот как:

> Если производная положительная, то это как бы «Газ», и исходная функция возрастает. Если производная отрицательная, то это как бы «Тормоз», и функция убывает.

В ЕГЭ было много задачек с картинками на возрастание — убывание. Надеемся, вы их не проигнорировали.

4.8.2 Максимум и минимум

Производную обычно используют для поиска самого лучшего: Самого большого дохода или самого маленького убытка, или еще чего-нибудь самого большого или самого маленького.

Поразмыслив про Газ, Тормоз, самую большую и самую маленькую скорость, вы, наверное, поймете, что самая большая скорость в тот момент, когда Газ уже отпустили, а Тормоз еще на нажали. А самая маленькая — наоборот. Говоря математически — в тех точках, где производная равна нулю.

Теорема 1 (Ферма). *В точках максимума и точках минимума производная равна нулю.*

Следует правильно понимать эту теорему:

1. В ней НЕ сказано, что если производная равна нулю, то в этой точке обязательно максимум или минимум.
2. В ней сказано, что в точках, где производная НЕ равна нулю, максимума и минимума точно нет, можно не искать.

Как же ею пользоваться?

1. Найти производную и точки, где она равна нулю. В них максимум и минимум могут быть (а могут и не быть). Это всего лишь подозрительные точки.
2. Есть в этих точках максимум или минимум, следует проверять дополнительно, другими способами.

4.9 Применение производной

Предположим, вам удалось закончить университет и вы пришли устраиваться на работу. И вам говорят: «Мы решили заняться перепродажей штучек. Сейчас закажем их в интернет магазине, вечером их доставят и утром перепродадим». Оптовая цена у штучки — 50. Потенциальных покупателей у нас 1000. Вопрос: по какой цене продавать. И это действительно вопрос:

1. Если цену назначить маленькой, то покупателей будет много, но заплатят они мало. Быть может, слишком мало.
2. Если цену назначить большой, то покупателей будет мало. И заплатят они хоть каждый и много, но в целом мало. Быть может, слишком мало.

Понятно, что требуется найти цену, при которой магазин наварит[15] больше всего.

А еще вам говорят, что провели пробные продажи, но из за недостатка времени их было только две:

1. На первой пробной продаже из 10 проходящих мимо человек 7 согласились купить штучку за 70 (и 3 отказались).
2. На второй — из 10 проходящих мимо человек 5 согласились купить штучку за 90 (и 5 отказались).

От вашей попытки решить эту очень жизненную задачу зависит ваше будущее, возьмут вас на работу уборщиком/цей или не уборщиком/цей. Сейчас мы расскажем вам, как решается

4.9.1 Задача про оптимальную цену продажи

Понятно, что спрос (т.е. то, сколько штучек купят покупатели) зависит от цены, чем меньше цена, тем больше спрос. Возникает *Функция спроса*, т.е. зависимость спроса (количества проданных штучек) от цены.

Понятно, что, вообще говоря, это сложная зависимость, и если рисовать её график, то получится сложная линия. Но мы еще маленькие, и поэтому будем её рисовать в виде прямой линии. А еще мы будем предполагать, что покупать будут по одной штучке в руки (потому что так проще считать).

Поскольку мы можем влиять на цену, то цену обозначим буквой x. Поскольку спрос зависит от цены, обозначим спрос буквой y.

По результатам пробной продажи можно найти две точки на этом самом графике с функцией спроса:

1. Если цена 70, то купят 7/10 от 1000 покупателей, т.е. 700 человек. Итак, если $x = 70$ то $y = 700$.
2. Если цена 90, то купят 5/10 от 1000 покупателей, т.е. 500 человек. Итак, если $x = 90$ то $y = 500$.

По двум точкам можно найти уравнение прямой (так, как это сделано в примере 7 (стр. 3)):

$$y = -10 \cdot x + 1400. \tag{39}$$

Это и есть функция спроса, т.е. зависимость спроса (т.е. количества купленных штучек, оно обозначено буквой y) от цены (она обозначена буквой x). С её помощью можно «узнавать будущее»:

Пример 64. Если продавать по 100, то покупателей будет $-10 \cdot 100 + 1400 = 400$ человек. На одной штучке мы наварим $(100 - 50) = 50$ и всего наварим $400 \cdot 50 = 2000$.

Упражнение 37. А если продавать по 500? Или по 10? Почему такие странные цифры получаются?

Понятно, что навар магазина вычисляется так:

1. Найдем навар на одной штучке, это цена продажи (это x) минус оптовая цена (это 50). Получится формула $(x - 50)$.
2. Умножим навар на одной штучке на количество проданных штучек (это y). Получится формула $y \cdot (x - 50)$.

[15]Вообще-то это называется то ли «доход», то ли «прибыль». Экономисты и экономистки должны знать точное название.

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u', \qquad (\operatorname{ctg} u)' = \frac{-1}{\sin^2 u} \cdot u', \quad (31)$$

$$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u', \quad (\arccos u)' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u', \quad (32)$$

$$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u', \qquad (\operatorname{arcctg} u)' = \frac{-1}{1+u^2} \cdot u'. \quad (33)$$

Таблица 4: Производные менее популярных функций в виде сложной функции

Пример 55. Найдем $\big(\ln\big(\sin(x^2)\big)\big)'$. Определив (по правилу 4 (стр. 15)) внутреннюю и внешнюю функции ($\sin(x^2)$ — внутренняя, $\ln(\quad)$ — внешняя), применим правило 5 (или формулу (30) из таблицы 3) первый раз:

$$\Big(\ln\big(\sin(x^2)\big)\Big)' = \frac{1}{\sin(x^2)} \cdot \big(\sin(x^2)\big)'.$$

Теперь нужно вычислить $\big(\sin(x^2)\big)'$. Это уже сделано в примере 53 (стр. 15). Итак,

$$\Big(\ln\big(\sin(x^2)\big)\Big)' = \frac{1}{\sin(x^2)} \cdot \cos(x^2) \cdot 2 \cdot x.$$

4.4 Производная произведения и дроби

С помощью умножения и деления можно составить из более простых функций более сложную.

Пример 56. Вот еще две функции: $x^2 \cdot \sin(x)$ и $\frac{x^2}{\sin(x)}$.

И вот еще два правила:

Правило 6 (производная произведения)**.**

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Правило 7 (производная дроби)**.**

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

Пример 57. Вот пример применения этих правил:

$$\big(x^2 \cdot \sin(x)\big)' = (x^2)' \cdot \sin(x) + (x^2) \cdot (\sin(x))' = \\ = 2 \cdot x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$$

и

$$\left(\frac{x^2}{\sin(x)}\right)' = \frac{2 \cdot x \cdot \sin(x) - x^2 \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)}.$$

4.4.1 Если вам встретится несколько умножений подряд

Не надо творчески модифицировать правило «производная произведения». Вам следует применять правило 6 последовательно для каждого умножения. Перед этим рекомендуется расставить скобки.

Пример 58. $\big(x^2 \cdot \sin(x) \cdot \ln(x)\big)'$ после расстановки скобок превращается в

$$\Big(\big(x^2 \cdot \sin(x)\big) \cdot \ln(x)\Big)',$$

и после применения правила 6 один раз превращается в

$$\big(x^2 \cdot \sin(x)\big)' \cdot \ln(x) + \big(x^2 \cdot \sin(x)\big) \cdot \frac{1}{x}.$$

Производная в скобках была найдена в предыдущем примере. Итак,

$$\big(x^2 \cdot \sin(x) \cdot \ln(x)\big)' = \\ = \big(2 \cdot x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)\big) \cdot \ln(x) + \big(x^2 \cdot \sin(x)\big) \cdot \frac{1}{x}.$$

4.5 Производные смешанных выражений

Иногда умножение, деление, сложение, вычитание и сложная функция встречаются в одном выражении. Все правила, необходимые для дифференцирования таких выражений, вы уже знаете, и теперь вам необходимо научиться определять, с которого начинать. Так же, как и в случае сложной функции, у выражений есть «внутренние действия» и «внешнее действие».

Пример 59. У выражения $\sin(x + x^2)$ внутреннее действие: $x + x^2$, внешнее действие: $\sin(\quad)$.

У выражения $\sin(x)+x^2$ внутренние действия: $\sin(x)$ и x^2, внешнее действие: $(\quad) + (\quad)$ (скобки добавлены для красоты).

У выражения $\sin(x+x^2)\cdot 5$ внутренние действия $\sin(x+x^2)$ и 5, внешнее действие: $(\quad) \cdot 5$.

У выражения $\sin(x) \cdot x^2$ внутренние действия $\sin(x)$ и x^2, внешнее действие: $(\quad) \cdot (\quad)$.

Так же, как и в случае сложной функции, отличать внешнее от внутреннего можно с помощью правила 4 (стр. 15).

Пример 60. При вычислении $\sin(100500 + 100500^2)$ последним действием будет sin(число).

При вычислении $\sin(100500) + 100500^2$ последним действием будет (число) + (число).

При вычислении $\sin(100500 + 100500^2) \cdot 5$ последним действием будет (число) $\cdot$ (5).

При вычислении $\sin(100500) \cdot 100500^2$ последним действием будет (число) $\cdot$ (число).

Так же, как и в случае сложной функции, дифференцирование надо начинать с «внешнего действия».

Пример 61. При дифференцировании $\sin(x+x^2)$ сначала следует применять формулу 29 из таблицы 3 (стр. 15):

$$\big(\sin(x + x^2)\big)' = \cos(x + x^2) \cdot (x + x^2)'.$$

При дифференцировании $\sin(x)+x^2$ сначала следует применять правило 1 (стр. 14):

$$\big(\sin(x) + x^2\big)' = \big(\sin(x)\big)' + \big(x^2\big)'.$$

При дифференцировании $\sin(x + x^2) \cdot 5$ сначала следует применять правило 2 (стр. 14):

$$\big(\sin(x + x^2) \cdot 5\big)' = \big(\sin(x + x^2)\big)' \cdot 5.$$

При дифференцировании $\sin(x) \cdot x^2$ сначала следует применять правило 6 (стр. 16)

$$\big(\sin(x) \cdot x^2\big)' = \big(\sin(x)\big)' \cdot x^2 + \sin(x) \cdot (x^2)'.$$

Упражнение 36. Завершите дифференцирования в предыдущих примерах.

Пример 43. Есть еще один способ решить задачу из примера 42, называется «метод неопределенных коэффициентов». Возьмем «заготовку»

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$$

и подставим в неё координаты трёх точек. Получится система из трех уравнений с четырьмя неизвестными A, B, C, и D. Осталось найти одно из решений (так, как это сделано в разделе 1.2 (стр. 2)) и подставить его в «заготовку».

Пример 44 (Задача про пересечение прямой и плоскости). Предположим, вам дали параметрическое уравнение прямой в пространстве:

$$\begin{cases} x = 5 + 1 \cdot t \\ y = 9 - 2 \cdot t \\ z = 9 + 1 \cdot t \end{cases} \tag{21}$$

и уравнение плоскости:

$$x - 2 \cdot y + z - 2 = 0.$$

И велели найти точку пересечения этой прямой с этой плоскостью.

Это легко, запишем эти уравнения рядышком и получим систему с четырьмя уравнениями и четырьмя неизвестными.

$$\begin{cases} x = 5 + 1 \cdot t \\ y = 9 - 2 \cdot t \\ z = 9 + 1 \cdot t \\ x - 2 \cdot y + z - 2 = 0. \end{cases}$$

Решив её, найдем $t{=}1$, $x{=}6$, $y{=}7$ и $z{=}10$. Это и есть точка пересечения — $(6; 7; 10)$. Если представлять себе плоскость как лужу, а прямую как траекторию самолетика, то $t{=}1$ — время, в которое самолетик упал в лужу в точку $(6; 7; 10)$.

Пример 45 (Проекция точки на плоскость). Представьте себе, что у нас есть уравнение плоскости (это как бы лужа) и координаты точки (это как бы камешек). Например, $x - 2 \cdot y + z - 2 = 0$, и $(5; 9; 9)$. Если отпустить камешек, то он будет падать перпендикулярно плоскости и сделает бульк. Точка, в которой камешек сделает бульк, называется *проекция точки на плоскость.*

Искать её можно так: По уравнению плоскости найдем вектор, перпендикулярный плоскости, как это сделано в упражнении 33 (стр. 13).

Например, у плоскости $x - 2 \cdot y + z - 2 = 0$ перпендикулярным вектором будет $(1; -2; 1)$. По точке, где камушек $(5; 9; 9)$, и вектору $(1; -2; 1)$ найдем уравнение прямой — это будет траектория падения камушка. В нашем случае это уравнение совершенно случайно совпадает с уравнением (21).

По уравнению прямой и уравнению плоскости найдем их точку пересечения, как это сделано в примере 44. Вот и готово.

Упражнение 34. Найдите точку, симметричную точке $(6; 7; 4)$ относительно плоскости $-3 \cdot x - 2 \cdot y - 2 \cdot z + 6 = 0$.

Пример 46 (Проекция точки на прямую). Эта задача аналогична задаче из примера 45 и решается похожим способом. Для решения нам понадобится «сделать лужу» в нужном месте.

Итак, нам дадут координаты точки (например $(1; 0; 1)$) и уравнение прямой, например, уравнение (21). По уравнению прямой найдем вектор, параллельный прямой (это будет $(1; -2; 1)$). (Как это сделать, написано в замечании 3 (стр. 12)). По той самой точке $(1; 0; 1)$ и этому вектору составим уравнение плоскости (получится $x - 2 \cdot y + z - 2 = 0$). Это и будет наша лужа.

Осталось найти точку пересечения прямой и плоскости, как в примере 44.

Упражнение 35. Найдите точку, симметричную точке $A = (-10; 12; -1)$ относительно прямой, проходящей через $B = (-3; 3; -3)$ и $C = (-7; 7; -2)$.

4 Производная и дифференцирование

Определение производной может быть легко найдено в любом учебнике по высшей математике.

Для дальнейшего чтения будет достаточно понимать, что *производная одной функции — это другая функция, полученная из первой по особым правилам.* Из этой главы вы узнаете, что это за правила, и как их применять.

Процесс получения производной из исходной функции называется *дифференцированием*, а результат дифференцирования, т.е. собственно производная, обозначается «штрихом»: f' — производная f.

4.1 Производная многочлена

Для дифференцирования многочлена понадобятся всего три правила[10].

Правило 1 (производная суммы и разности). *Производная суммы равна сумме производных:*

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Производная разности равна разности производных:

$$(u - v)' = u' - v'.$$

И если встречается несколько сложений и вычитаний, то правило аналогичное:

$$(u_1 + u_2 - u_3 \pm \ldots \pm u_n)' = u_1' + u_2' - u_3' \pm \ldots \pm u_n'.$$

Правило 2 (об умножении на число). *Число выносится за знак производной:*

$$(\alpha \cdot u)' = \alpha \cdot (u)'.$$

Т.е. $(3 \cdot x^5)' = 3 \cdot (x^5)'$, $(x^2 \cdot 15)' = (x^2)' \cdot 15$, ...

Правило 3 (производная степени).

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}.$$

Т.е. $x' = 1$, $(x^2)' = 2 \cdot x$, $(x^3)' = 3 \cdot x^2$, $(x^4)' = 4 \cdot x^3$, ...

Если переменной нет, т.е. это просто число, то производная равна нулю: $1'{=}0$, $-2'{=}0$, $1488'{=}0$ *и даже* $0'{=}0$.

Применять эти правила надо в последовательности, обратной к вычислению. Как известно, сначала вычисляется степень, потом умножение, и только потом сложение и вычитание, но с производной все наоборот, сначала следует применять правило «производная суммы и разности», потом «об умножении на число», и в конце «производная степени».

[10] Это универсальные правила, они применимы не только к многочленам.

Это система линейных уравнений из одного уравнения с тремя неизвестными. Решив её так, как написано в разделе 1.2, найдем одно из ненулевых решений: $\vec{b} = (-2; 1; 0)$.

Пример 32 (Задача про построение вектора перпендикулярного двум другим). Дано два вектора в пространстве. (Например, $\vec{a} = (1; 2; 3)$ и $\vec{b} = (4; 5; 6)$). Найти вектор, перпендикулярный вектору $\vec{a}$ и перпендикулярный вектору $\vec{b}$.

Для наглядности положите на парту перед собой две ручки. Вектор, направленный вверх — как раз то, что нужно. Кстати, вектор, направленный вниз — тоже то, что нужно, т.е. у задачи много решений.

Решать задачу будем почти так же как и примере 31: Если $\vec{c} = (x; y; z)$ — искомый вектор, то должны выполняться два равенства:

$$\begin{aligned} 1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z = 0, \\ 4 \cdot x + 5 \cdot y + 6 \cdot z = 0. \end{aligned}$$

Это система линейных уравнений из двух уравнений с тремя неизвестными. Решив её (так, как написано в в разделе 1.2 (стр. 2)), найдем одно из ненулевых решений: $\vec{c} = (1; -2; 1)$.

Упражнение 29. Найдите ненулевой вектор, перпендикулярный векторам $(0; 1; 1)$ и $(0; 1; 2)$.

3.5 Параметрическое уравнение прямой

В природе существует много разнообразных уравнений прямой, но наиболее полезно из них так называемое *параметрическое уравнение прямой.*

Оно похоже на подпрограмму, симулирующую полет самолетика в компьютерной игрушке: на вход подаем время — на выходе получаем координаты самолетика в этот момент времени.

Для написания уравнения конкретной прямой надо знать две вещи — какую-нибудь точку на прямой (точнее, координаты точки), и какой-нибудь вектор, параллельный прямой (точнее, координаты вектора).

Определение 2. *Если эта точка $(x_1; y_1; z_1)$ и вектор $(\alpha; \beta; \gamma)$, то параметрическое уравнение выглядит так:*

$$\begin{cases} x = x_1 + \alpha \cdot t \\ y = y_1 + \beta \cdot t \\ z = z_1 + \gamma \cdot t. \end{cases} \tag{18}$$

Буква t в этом уравнении — это так называемый параметр *— в него можно подставлять время.*

При $t=0$ самолетик находится в точке $(x_1; y_1; z_1)$, при положительных значениях t — перелетает по направлению вектора $(\alpha; \beta; \gamma)$, при отрицательных — наоборот.

Сама прямая — это как бы след, оставленный этим самолетиком в небе.

Аналогично определяется параметрическое уравнение прямой на плоскости:

$$\begin{cases} x = x_1 + \alpha \cdot t \\ y = y_1 + \beta \cdot t, \end{cases} \tag{19}$$

где $(x_1; y_1)$ — точка, через которую проедет автомобильчик, $(\alpha; \beta)$ — вектор, параллельный направлению движения автомобильчика, а сама прямая — след автомобильчика на плоскости.

Упражнение 30. Найдите параметрическое уравнение прямой, которая проходит через точку $(1; 2)$ и параллельна вектору $(3; 4)$.

Замечание 3. Если вам дали готовое уравнение прямой, то из него можно извлечь некоторую информацию. Коэффициенты при параметре — координаты вектора параллельного прямой. Например, посмотрев на уравнение

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 4 \cdot t, \end{cases}$$

можно сразу догадаться, что эта прямая параллельна вектору $(3; 4)$.

Пример 33 (прямая по двум точкам). Даны две точки, $A = (1; 2)$ и $B = (3; 7)$. Требуется найти уравнение прямой, проходящей через эти точки.

Вспомним, (см. определение 2) что нам понадобится точка на прямой (она у нас есть) и вектор, параллельный прямой (подойдет $\vec{AB} = (3 - 1; 7 - 3) = (2; 4)$). Итак, записываем:

$$\begin{cases} x = 1 + 2 \cdot t \\ y = 2 + 4 \cdot t. \end{cases}$$

Пример 34 (про столкновение автомобилей). Уравнения движения двух автомобилей задаются двумя формулами

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 1 \cdot t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 3 + 1 \cdot t \\ y = 5 - 2 \cdot t. \end{cases}$$

Определить, столкнутся ли они.

Столкновение — это когда два автомобиля находятся в одно время в одном месте. Для решения достаточно соединить два уравнения в одну систему

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 1 \cdot t \\ x = 2 + 1 \cdot t \\ y = 7 - 2 \cdot t \end{cases}$$

и решить её.

Получится $x = 4$, $y = 3$, $t = 1$. Т.е. они столкнутся в точке $(4; 3)$ в момент времени 1.

Пример 35 (опять про столкновение). Уравнения движения двух автомобилей задаются двумя формулами

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 1 \cdot t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 2 + 1 \cdot t \\ y = 7 - 2 \cdot t. \end{cases}$$

Соединив два уравнения в одну систему

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 1 \cdot t \\ x = 2 + 1 \cdot t \\ y = 7 - 2 \cdot t, \end{cases}$$

обнаружим, что у неё нет решения. Следовательно, эти автомобильчики не столкнутся.

Пример 36 (Задача про пересечение прямых). Даны уравнения двух прямых

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot t \\ y = 2 + 1 \cdot t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 6 + 1 \cdot t \\ y = 2 + 2 \cdot t. \end{cases}$$

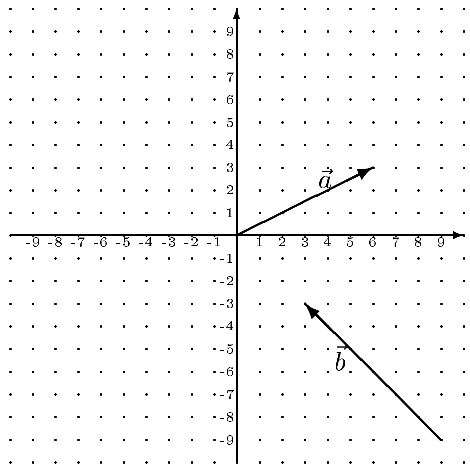

Рис. 4: Картинка с векторами

«вектор, который можно изобразить в виде направленного отрезка с началом в точке A и концом в точке B».

Ситуация ещё более осложняется тем, что в физике есть понятие «свободный вектор» (это просто вектор) и «закрепленный вектор» (это направленный отрезок).

Обычно вектора обозначают «стрелочкой сверху», примерно так: $\vec{a}$.

3.2 Координаты точек и векторов. Операции с векторами и координатами.

Координаты точек в обыкновенной прямоугольной декартовой системе координат проходят в школе.

Координаты векторов находятся по заклинанию

$$\boxed{\text{из конца вычесть начало,}}$$

с которым вас тоже познакомили в школе.

Упражнение 20. Возьмите бумажку в клеточку, нарисуйте там несколько направленных отрезков и убедитесь, что заклинание находит координаты вектора, а не направленного отрезка.

Пример 22. На рисунке 4 изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдем координаты вектора $2 \cdot \vec{a} - 3 \cdot \vec{b}$.

«Начало вектора» $\vec{b}$ изображено в точке с координатами $(9; -9)$, а «конец вектора» — в точке с координатами $(3; -3)$. Найдем координаты вектора по заклинанию «из конца вычесть начало»: Первая координата $\vec{b}$ равна $3 - 9 = -6$, а вторая $-3 - (-9) = 6$. Таким образом, $\vec{b} = (-6; 6)$. Точно так же находим координаты $\vec{a} = (6; 3)$.

Вспомним, что при умножении вектора на число, его координаты умножаются на это число, а при сложении векторов их координаты складываются[8]. Таким образом, координаты вектора $2 \cdot \vec{a} - 3 \cdot \vec{b}$ будут

$2 \cdot \vec{a} - 3 \cdot \vec{b} = 2 \cdot (6; 3) - 3 \cdot (-6; 6) = (2 \cdot 6; 2 \cdot 3) - (3 \cdot (-6); 3 \cdot 6) = (12; 6) - (-18; 18) = (30; -12)$.

Упражнение 21. Найдите координаты вектора $3 \cdot \vec{a} + \vec{b}$.

Пример 23 (Задача про координаты концов вектора). Если мы знаем координаты начала и конца вектора, то координаты вектора находятся по заклинанию «из конца вычесть начало» (см. пример 22 (стр. 10)). Как найти координаты конца вектора, если мы знаем только координаты вектора (например, $(-6; 6)$) и координаты его начала (например, $(9; -9)$)? А вот как:

1. Обозначим координаты начала $(x; y)$, и по заклинанию «из конца вычесть начало» составим уравнения: $x - 9 = -6$ и $y - (-9) = 6$.

2. Решив их, найдем $x = 3$, $y = -3$.

Так что, фактически, координаты конца вектора находятся по заклинанию «к координатам начала прибавить координаты вектора».

Упражнение 22. $\vec{AB} = (4; 2)$, $B = (5; 4)$. Найдите координаты точки A.

Пример 24 (Задача про вершину параллелограмма). Даны координаты трех вершин параллелограмма $ABCD$: $A = (2; 1)$, $B = (5; 2)$, $D = (3; 5)$. Найдем координаты четвертой вершины.

Заметим, что если пририсовать к сторонам стрелочки, то получится картинка про сложение векторов по правилу параллелограмма. Т.е., получается формула:

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}.$$

Так и будем решать: Сначала найдем координаты векторов $\vec{AB} = (3; 1)$ и $\vec{AD} = (1; 4)$ (как это сделано в примере 22). Найдем $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} = (3 + 1; 1 + 4) = (4; 5)$ и по точке и вектору найдем (как это сделано в примере 23) координаты $C = (6; 6)$.

Упражнение 23. Координаты точек A, B и D — как в примере 24. Найдите координаты точки C в параллелограмме $ABDC$[9].

Пример 25 (Задача про деление отрезка). Даны координаты вершин отрезка $A = (2; 3)$, $B = (8; 5)$, например. Некоторая точка C делит отрезок в некотором отношении, например, пополам. Нужно найти координаты этой точки.

Сведем задачу к векторам. Пририсовав стрелочки, мы увидим два вектора $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$, направленные в одну сторону. Следовательно, один из них получается из другого после умножения на число. Поскольку нам нужно делить отрезок пополам, то это число $1/2$, точнее, $\vec{AC} = (1/2) \cdot \vec{AB}$.

Найдем координаты $\vec{AB}$ (как это сделано в 3.2) и умножим на $1/2$: $\vec{AC} = (1/2) \cdot (8 - 2; 5 - 3) = (1/2) \cdot (6; 2) = ((1/2) \cdot 6; (1/2) \cdot 2)) = (3; 1)$. Осталось найти (как это сделано в 23 (стр. 10)) координаты точки $C = (5; 4)$.

Упражнение 24. Найдите координаты точек, которые делят отрезок AB из примера 25 на три одинаковые части.

3.3 Скалярное произведение

Как известно, у векторов есть две наглядные геометрические характеристики — длина вектора и угол между векторами. Но, поскольку у нас в компьютере вектора хранятся в виде чисел (координат), то нам понадобятся формулы, позволяющие находить длины и углы по координатам. Это большие и сложные формулы, но у них есть повторяющаяся часть, о которой мы сейчас и поговорим.

Если $\vec{a} = (\alpha_1; \alpha_2)$ и $\vec{b} = (\beta_1; \beta_2)$ — координаты векторов, то их *скалярное произведение* находится по формуле

$$\alpha_1 \cdot \beta_1 + \alpha_2 \cdot \beta_2. \tag{14}$$

Заклинание для запоминания:

[8] В школе рисовали рисуночки, соответствующие сложению, вычитанию и умножению вектора на число. Если вы их уже забыли, срочно погуглите картинки «операции с векторами».

[9] Напоминаем, что вершины параллелограмма обозначаются «по кругу».

и бананы, а еще и кукурузу и помидоры, то в таблице было бы больше двух чисел).

Между выращенным и съеденным есть очевидная зависимость:

$$x_1 = 0.1 \cdot u_1 + 0.2 \cdot u_2,$$
$$x_2 = 0.3 \cdot u_1 + 0.6 \cdot u_2.$$

Действительно, т.к. при выращивании 1 тонны кокосов съедается 100 кг $= 0.1$ тонна кокосов, то при выращивании u_1 кокосов съестся $u_1 \cdot 0.1$ кокосов. Аналогично с бананами, на u_2 бананов съестся $u_2 \cdot 0.2$ кокосов. Осталось сложить съеденные кокосы, и получится первое уравнение. Второе получается аналогично.

Между выращенным, съеденным и вывезенным есть очевидная зависимость:

$$v_1 = u_1 - x_1,$$
$$v_2 = u_2 - x_2.$$

Действительно, т.к. всё что не съели то вывезли.

Эти зависимости можно записать в матричном виде:

$$X = A \cdot U \quad \text{и} \quad V = U - X, \tag{11}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

(Кстати, если продуктов не два, а много-много, то зависимости в матричном виде будут те же самые. Вот какие матрицы полезные).

Итак, наша цель — научиться находить запланированный урожай, т.е. U.

Уравнения (11) очень простые, если бы они были «про числа», то вы бы легко выразили U через V. С матрицами это так же просто, но нужно не забывать, что роль 1 теперь играет единичная матрица E:

$$(E - A) \cdot U = V \quad \text{или} \quad U = (E - A)^{-1} \cdot V$$

Осталось найти обратную матрицу и умножить.

Кстати, в экономических науках матрица A называется «матрица прямых затрат», а матрица $(E - A)^{-1}$ — «матрица полных затрат».

Упражнение 15. Погуглите «обратная матрица онлайн», найдите ту самую обратную матрицу и узнайте, какой урожай надо запланировать для вывоза с острова 60 тонн кокосов и 60 тонн бананов.

2.5 Как искать обратную матрицу

Оказывается, для обратной матрицы есть готовая формула. Очень удобно, подставляем в нее числа из матрицы, вычисляем по формулам, и готово. Для матриц размера 2×2 эта формула очень простая:

Утверждение 2. *Если*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{12}$$

то

$$A^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - c \cdot b} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Упражнение 16. Найдите $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$.

Упражнение 17. Перемножьте матрицу (12) с формулой (13) и убедитесь, что мы вас не обманываем.

Для матриц большего размера аналогичные формулы тоже есть, но они оооочень большие. Так что для матриц размера больше чем 2×2 следует применять

2.5.1 Самый хороший алгоритм поиска обратной матрицы

Даже если вы попали на необитаемый остров, и там совсем нет учебников и справочников, вы сможете найти обратную матрицу наиболее прямолинейным и неинтересным способом — просто решив систему уравнений:

Обозначим $n \times n$ элементов пока неизвестной обратной матрицы $n \times n$ буквами, перемножим и приравняем к единичной. Получится система уравнений из n^2 уравнений с n^2 неизвестными.

Пример 18. Найдем $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^{-1}$. Т.е. найдем числа a, b, c и d в уравнении

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перемножим

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot a + 2 \cdot b & 1 \cdot c + 2 \cdot d \\ 3 \cdot a + 7 \cdot b & 3 \cdot c + 7 \cdot d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и, записав это равенство «поэлементно», получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 \cdot a + 2 \cdot b & & = 1 \\ & 1 \cdot c + 2 \cdot d & = 0 \\ 3 \cdot a + 7 \cdot b & & = 0 \\ & 3 \cdot c + 7 \cdot d & = 1. \end{cases}$$

Решив её, найдем обратную матрицу.

На этом можно было бы и остановиться, но присмотревшись к системе, можно заметить, что она распадается на n систем с n уравнениями, и каждая со своими n неизвестными.

Пример 19. В предыдущем примере можно было бы решать две системы:

$$\begin{cases} 1 \cdot a + 2 \cdot b = 1 \\ 3 \cdot a + 7 \cdot b = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 1 \cdot c + 2 \cdot d = 0 \\ 3 \cdot c + 7 \cdot d = 1. \end{cases}$$

Так что если вас на необитаемом острове n человек, то вы можете «распределить нагрузку» и решать эти системы одновременно.

На этом можно было бы и остановиться, но если вы уже освоили метод элементарных преобразований (про это написано в разделе 1.3 (стр. 2)), то вы сможете заметить, что у этих систем одинаковая левая часть. Значит, и преобразования нужно делать одинаковые.

Упражнение 18. Убедитесь, что эти преобразования такие: Сначала первое уравнение умножить на -3 и прибавить ко второму. Затем второе умножить на -2 и прибавить к первому.

Это значит, что только одному из n вас на острове нужно будет выбирать преобразования и обсчитывать левую часть системы уравнений, а остальным $n - 1$ можно будет списывать вычисления в левой части и самостоятельно обсчитывать только правую.

Для реализации алгоритма понадобятся «формулы», превращающие числа из исходной системы в числа в улучшенной системе, и вот эти формулы как раз легко записать «через матрицы». Но сначала нам понадобится одно техническое понятие:

2.3.1 Транспонирование матриц

Транспонирование — это как бы переворачивание матрицы через главную диагональ.

Пример 14. Исходная матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

транспонированная матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Как видите, при транспонировании строчки превращаются в столбцы, а столбцы в строчки.

Обозначается транспонирование A^T, т.е.[4]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Итак, продолжим излагать

2.3.2 Алгоритм улучшения систем линейных уравнений

1. Берем систему уравнений, записываем в матричном виде (как это сделано в примере 13 на странице 5) и получаем матричное уравнение вида
$$A \cdot X = Y.$$
2. Умножаем обе части матричного уравнения на транспонированную A слева:
$$A^T \cdot A \cdot X = A^T \cdot Y$$
и получаем новое матричное уравнение.
$$(A^T \cdot A) \cdot X = (A^T \cdot Y).$$
3. Записав его обратно в виде системы уравнений, получим то, что нам и нужно — «улучшенную систему».

Пример 15. Система уравнений (8) со страницы 5 в матричном виде выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 6 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

После умножения на транспонированную получится:

$$(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 6 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}) \cdot \begin{pmatrix} k \\ b \end{pmatrix} = (\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}).$$

Умножив и записав в виде системы уравнений, получим систему (9) со страницы 5.

[4] Но если вы скажете на экзамене «возведение матрицы в степень T», то реакция экзаменатора вас удивит, но не обрадует.

Упражнение 8. Измерьте и взвесьте своих одногруппников и получите формулу, позволяющую по росту находить вес «типичного студента». Сколько будет весить студент с ростом три метра?

Упражнение 9. Погуглите «Периодизация финансовой истории постдефолтной России Подлазов А.В.», прочитайте и поймите, как были сделаны вычисления.

2.4 Обратная матрица

Матрицы можно умножать, но делить матрицы нельзя. Но если очень хочется, то можно это сделать с помощью умножения на обратную матрицу.

Деление умножением вы проходили в школе, сейчас мы вам это напомним: Представьте, что у вашего калькулятора сломалась кнопка «поделить», но вам очень нужно найти 123456789/4. Вспомним, что 4 обратно к 0.25 (т.к. $4 \cdot 0.25 = 1$), и «поделим умножением»: $123456789/4 = 123456789 \cdot 0.25$. Примерно так мы и будем «делить на матрицу».

Хотелось бы определить обратную матрицу подобно обратным числам (если $a \cdot b = 1$, то a обратно b и b обратно к a), но произведение матриц — это матрица а не число, и оно не может равняться единице. Так что сначала понадобится матричный аналог единицы.

2.4.1 Единичная матрица

Это квадратная матрица, у которой по главной диагонали (той, которая идет от верхнего левого угла в правый нижний) стоят единицы, а в остальных местах нули. Размеры могут быть разные, так что единичных матриц много.

Пример 16. Вот это единичные матрицы разных размеров:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

Обычно, единичную матрицу *обозначают буквой E*.

Важно, чтобы единички стояли по главной диагонали (сверху слева вниз направо), иначе это не единичная матрица.

Единичная матрица при матричном умножении ведет себя как обычное число 1 при обычном умножении чисел т.е.:

$$A \cdot E = A \quad \text{и} \quad E \cdot A = A.$$

Упражнение 10. Умножьте единичную матрицу на $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и убедитесь, что мы вас не обманываем.

Упражнение 11. Перемножьте $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ с $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и поймите, почему единички должны обязательно стоять на главной диагонали.

2.4.2 Определение обратной матрицы

Вот теперь мы можем определить обратную матрицу:

Определение 1. *Если $A \cdot B = E$, то A обратна к B и B обратна к A*[5].

[5] «Но при перестановке множителей произведение может измениться, что делать, если это произойдет?», спросят самые наблюдательные. По некоторым хитрым причинам, если $A \cdot B = E$, то и $B \cdot A = E$, так что всё в порядке. По научному это называется «левое обратное равно правому обратному».

Упражнение 3. Найдите уравнение прямой, проходящей через точки $(-6; -8)$ и $(4; -6)$.

Пример 8 (Как найти точку пересечения прямых). Берем два уравнения прямых, записываем их одно под другим и получаем систему уравнений. Решив её, найдем точку пересечения.

Упражнение 4. Найдите точку пересечения прямых $y = \frac{1}{5} \cdot x + \frac{-34}{5}$ и $y = \frac{1}{6} \cdot x + \frac{-37}{6}$.

2 Матрицы

Матрица — это таблица из чисел. Вот пример матрицы с двумя строчками и тремя колонками.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Скобки не являются частью матрицы, они тут для отделения матрицы от окружающего пространства.

Обычно, когда говорят про матрицы, то сначала упоминают строчки и потом колонки. Например, матрица сверху это матрица 2×3, а не 3×2. И это же касается элементов матрицы, например, 6 — это элемент с номером 2 3, т.е. элемент из второй строчки и третьей колонки.

Матрицы в математике нужны для того же, для чего нужны подпрограммы в программировании, с их помощью можно сложные формулы с числами записать в виде простых формул, но с матрицами.

Именно для записи формул с матрицами и понадобятся

2.1 Операции с матрицами

Которые обозначаются примерно так же, как и операции с числами — «точкой» «крестиком» и «палочкой»[2].

2.1.1 Сложение, вычитание и умножение на число

Делается так же, как и аналогичные операции с векторами, так сказать, поэлементно:

Пример 9.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix},$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что не любые матрицы можно складывать и вычитать, у них должны быть одинаковые размеры.

2.1.2 Умножение матриц между собой

Принципиально отличается от сложения и вычитания. Оно делается по заклинанию

$$\boxed{\text{строка на столбец.}}$$

Вот пример такого умножения:

Пример 10.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{pmatrix}.$$

Это делается так:

1. Выбираем строчку левой матрицы и столбец правой.
2. Производим что-то типа скалярного произведения — перемножаем и складываем.
3. Результат (это число) записываем в «ячейку», у которой такой же номер строчки и номер столбца.
4. Проделываем это действие для всех строчек левой матрицы и всех столбцов правой.

Например, число 64, стоящее в первой строке и втором столбце, получилось как результат умножения чисел 1 2 3 из первой строки левой матрицы на 8 10 12 из второго столбца правой матрицы:

$$1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 12 = 64.$$

Упражнение 5. Примените заклинание «строка на столбец» к оставшимся строкам и столбцам и убедитесь, что мы вас не обманываем.

Заметим, что не любые матрицы можно перемножать. Их размеры должны соответствовать заклинанию «строка на столбец», т.е. количество элементов в строке левой матрицы равно количеству элементов в столбце правой.

2.1.3 Свойства операций с матрицами

Примерно такие же, как и у аналогичных операций с числами, но не совсем. Как показывает следующий пример, при перестановке множителей результат может измениться.

Пример 11.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

А как показывает этот

Пример 12.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

может и не измениться.

Упражнение 6. Погуглите «свойства операций с матрицами» и внимательно изучите остальные свойства.

2.2 Матрицы и системы линейных уравнений

Вам, наверное, интересно, почему для умножения матриц математики придумали такое хитрое правило? А вот почему:

Посмотрите внимательно на эту формулу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z \\ 4 \cdot x + 5 \cdot y + 6 \cdot z \end{pmatrix}.$$

Это похоже на левую часть системы линейных уравнений. И действительно, теперь

[2] У программистов это называется «перегрузка операторов».

Пример 4. Решим систему из примера 1. Сначала выразим y из первого уравнения

$$y = -3 + 2 \cdot x + z$$

и подставим во второе:

$$\begin{aligned} 3 \cdot x - (-3 + 2 \cdot x + z) + 4 \cdot z &= 13 \\ 3 \cdot x + 3 - 2 \cdot x - z + 4 \cdot z &= 13 \\ x + 3 \cdot z &= 10 \end{aligned}$$

и третье

$$\begin{aligned} x + 2 \cdot (-3 + 2 \cdot x + z) + 5 \cdot z &= 20 \\ x - 6 + 4 \cdot x + 2 \cdot z + 5 \cdot z &= 20 \\ 5 \cdot x + 7 \cdot z &= 26. \end{aligned}$$

В результате получим систему с меньшим числом неизвестных

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & 3 \cdot z & = & 10 \\ 5 \cdot x & + & 7 \cdot z & = & 26 \end{array} \right. \tag{1}$$

и формулу для нахождения «выраженной» неизвестной

$$y = -3 + 2 \cdot x + z. \tag{2}$$

Теперь применим метод исключения неизвестных к системе (1). Выразим x из первого уравнения

$$x = 10 - 3 \cdot z$$

и подставим в оставшееся уравнение

$$\begin{aligned} 5 \cdot (10 - 3 \cdot z) + 7 \cdot z &= 26 \\ 50 - 15 \cdot z + 7 \cdot z &= 26 \\ -8 \cdot z &= -24 \end{aligned}$$

и в формулу (2) для «выраженной» неизвестной

$$y = -3 + 2 \cdot (10 - 3 \cdot z) + z = -3 + 20 - 6 \cdot z + z = 17 - 5 \cdot z.$$

Получилась совсем простая система из одного уравнения с одной неизвестной

$$\{-8 \cdot z = -24$$

и две формулы для нахождения двух исключенных неизвестных

$$\begin{aligned} y &= 17 - 5 \cdot z \\ x &= 10 - 3 \cdot z. \end{aligned}$$

Осталось «выразить» значение $z = 3$ и, «подставив» в формулы для нахождения x и y, найти значения $y = 2$ и $x = 1$.

1.2 Решение систем линейных уравнений с несколькими решениями

У систем уравнений может быть и бесконечно много решений (см. пример 3 (стр. 1)). Выписать все решения, разумеется, невозможно, но зато можно найти формулы для удобного нахождения всех решений.

Например, возьмем систему

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} -2 \cdot x & + & y & - & z & = & -3 \\ 3 \cdot x & - & y & + & 4 \cdot z & = & 13. \end{array} \right.$$

Исключая неизвестные так же, как это сделано в разделе 1.1 (стр. 1), получим формулы

$$\begin{aligned} y &= 17 - 5 \cdot z \\ x &= 10 - 3 \cdot z. \end{aligned} \tag{3}$$

Эти формулы называются *общее решение системы уравнений.*

Просто решения (их иногда называют *частные решения системы уравнений*) легко получить, подставляя в формулы (3) вместо z (эту неизвестную иногда называют «свободная неизвестная») любые числа[1]. Например:

1. Подставив в (3) вместо z число 0, получим: $x = 17$, $y = 10$, $z = 0$. Это одно частное решение.
2. Подставив вместо z число 1, получим $x = 12$, $y = 7$, $z = 1$ — еще одно частное решение.
3. И так далее.

Таким образом, по общему решению можно найти сколько угодно просто решений (частных решений).

1.3 Метод элементарных преобразований

Элементарное преобразование (системы уравнений) — это когда

одно уравнение умножают на число и прибавляют к другому уравнению.

Пример 5. Возьмем систему, содержащую уравнения

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \cdots & & & & & & \\ 1 \cdot x & + & 2 \cdot y & + & 3 \cdot z & = & 4 \\ 5 \cdot x & + & 6 \cdot y & + & 7 \cdot z & = & 8 \\ \cdots & & & & & & \end{array} \right. \tag{4}$$

и применим преобразование «первое уравнение умножить на -2 и прибавить ко второму». Умножать мы будем «в уме», т.е первое уравнение не изменится, и его мы просто перепишем. Во втором уравнении имеет смысл проделать вычисления отдельно для каждой неизвестной:

$$\begin{aligned} (1 \cdot x) \cdot (-2) + (5 \cdot x) &= 3 \cdot x \\ (2 \cdot y) \cdot (-2) + (6 \cdot y) &= 2 \cdot y \\ (3 \cdot y) \cdot (-2) + (7 \cdot y) &= 1 \cdot y, \end{aligned}$$

и для «правой части»

$$4 \cdot (-2) + 8 = 0.$$

В результате получится новая система

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \cdots & & & & & & \\ 1 \cdot x & + & 2 \cdot y & + & 3 \cdot z & = & 4 \\ 3 \cdot x & + & 2 \cdot y & + & 1 \cdot z & = & 0 \\ \cdots & & & & & & \end{array} \right. \tag{5}$$

Самое ценное для нас свойство элементарного преобразования — следующее:

Утверждение 1. *Элементарное преобразование не меняет решений системы уравнений. (Т.е. у системы (4) и системы (5) решения одинаковые).*

[1] Да да, любые, первые пришедшие в голову тоже можно подставлять.